ISSN: 2745-3673
http://www.Rcsj.ir

مجله‌ی علمی پژوهش در علوم رایانه (سال چهارم)
شماره ۱۵ / پاییز ۱۳۹۸ / ص ۲۲– ۱۶

استراتژی الهام گرفته از فیزیک درحل مسائل دشوار

امیراحمد نیری
مدرس، بخش علوم‌کامپیوتر، دانشکده علوم پایه، دانشگاه سلمان فارسی کازرون.

نام نویسنده مسئول:
امیراحمد نیری

چکیده
درسالهای اخیر استراتژیهای جدیدی برای حل مسائل دشوار ابداع شده‌است که باالهام از سایر رویدادهای فیزیکی وبیولوژیکی بدنبال یافتن پاسخ مسائل دشوار می باشند، مسائلی که پیچیدگی زمانی یافتن راه حل آنها بطور نمایی با اندازه ی مساله متناسب می باشند. دراین مقاله، ابتدا به ارائه تعریف ساده‌ای ازطبقه بندی مسائل (دشوار،ساده) می‌پردازیم. البته کلاسهای پیچیدگی بسیار زیادی وجود دارند که در اینجا قصد بررسی آنها وجود ندارد. نشان خواهیم داد که در گروه وسیعی از مسائل دشوار، یافتن پاسخ برای مساله متناظر با یافتن می نیمم مطلق یک تابع است. تابعی که به خاطر وفور تعداد می نیمم های موضعی امکان یافتن می نیمم مطلق در آن دشوار است. سپس به بررسی استراتژی منبعث از فیزیک برای حل این مساله می پردازیم و در این راه از کوششهای اخیر برای حل این مساله با استفاده از تعبیر فیزیکی از دگردیسی فضای حالت با افزایش چگالی قیود بهره می جوییم.

واژگان کلیدی: مسائل دشوار، مسائل رام، NP-complete، ارضاپذیری فرمول K-SAT، Hamiltonian، همبستگی، تغییر فاز، رفتار آستانه ای.

مجلـه‌ی علمی پژوهش در علوم رایانه ، شماره ۱۵، پاییز ۱۳۹۸، ص ۲۲- ۱۶

ISSN: 2745-3673
http://www.Rcsj.ir

مقدمه

در دهه های اخیر بارشد فزایندۀ فناوری محاسباتی، تلاش شده است تااین ابزار کارآمد ومؤثریعنی کامپیوتر را برای حل مسائل دشوار بکار برد. نکته ی اساسی در این مسیر آنست که دامنه ی وسیعی از مسائل را می توان به یک جستجو در فضایی که بطور نمایی با اندازه مساله رشد می کند، تبدیل کرد[1]. باوجود دستاوردهای خیره کننده‌ای که رشد صنعت کامپیوتر بهمراه داشته است، امروزه می‌دانیم حل تعداد زیادی از مسائل همچنان بسیاردشوار وحتی غیرقابل امکان می‌باشد. این دشواری را می‌توان ازجنبه‌های مختلف مورد بررسی قرارداد. ازنظر تئوریک، مسائل به دوگروه مسائل حل‌پذیر (solvable) ومسائل حل‌ناپذیر (un solvable) تقسیم بندی می‌شوند [۲]. مسائل حل‌ناپذیری صرفه‌نظراز توان تئوریک ومحاسباتی بشر، بدلیل وجودتصمیم ناپذیری ذاتی غیرقابل حل می‌باشند. مشهورترین مسأله حل ناپذیر یا غیرقابل محاسبه، مسأله توقف پذیری یا Halting Problem است. می‌توان نشان داد که هیچ الگوریتمی وجود ندارد که با دریافت یک برنامه، درمورد توقف پذیری آن تصمیم‌گیری کند[۲].

مسأله توقف پذیری وتحقیق دربارۀ آن .محرک بسیاری ازدستاوردهای خیره کننده در حوزۀ علوم کامپیوتر بوده است. اولین بارchaitin در اواسط دهۀ ۱۹۸۰ نشان داد که احتمال توقف یک برنامه یاهمان عدد(اُمگا)، یک عددفشرده ناپذیراست وازنظر تئوریک حاوی بیشترین حجم از اطلاعات می‌باشد[۳]. این عدد توسط معادله(۱)تعریف می‌شود.

$$\Omega = \sum_{phalts} 2^{-(size\ in\ bits\ of\ p)} \tag{1}$$

گروه دوم مسائل حل پذیر(solvable) هستند. متاسفانه اعتماد بنفسی که درآغاز ازمشاهدۀ نام این گروه بدست می آید. درسایۀ شناخت بیشترآنها ازدست می‌رود. این خانواده ازمسائل به دوگروه عمده تقسیم می‌شوند، اگرچه به لحاظ ماهیت هر گروه دارای خانواده‌های بسیار زیادی است که شرح آن دراین خلاصه نمی‌گنجد[۱].

مسائلی که بادرنظرگرفتن محدودیتهای عملی یعنی زمان وحافظه موردنیاز عملا حل پذیرند ومسائلی که باعنایت به پارامترهای فوق عملا پذیر نمی‌باشند. این حل‌پذیری عملی مخصوصاً بدلیل پیچیدگی زمانی موردنیازبرای حل این مسائل است که با بکارگیری سریعترین ابرکامپیوترها از هزاران قرن نیزتجاوزمی‌کند. اصلی ترین تلاشها درعلوم کامپیوتر رامی‌توان درجهت تقلیل این پیچیدگی بااستفاده ازتکنیک‌های مختلف (استفاده ازروشهای تصادفی،relaxation ،...) دانست [۲،۴]. دربخش بعد به بررسی مشکلات یافتن پاسخ برای یکی از مهمترین مسائل ارضا قید با نام K-SAT می پردازیم. حل این مساله بجهت ماهیت NP-Complete به مثابه ی یافتن راه حل برای خانواده بسیار مهمی از مسائل است که با کلاس پیچیدگی NP شناخته می شوند..

پیشینه مساله ارضاپذیری(K-SAT)

برای آن که بتوانیم به بررسی دقیق علت دشواری یافتن پاسخ درمسائل گستاخ یا NP بپردازیم به بررسی یک مساله مشهور که دارای تمامیت NP یا NP-Completeness است، می پردازیم.

تعریف مساله K-SAT(ارضاپذیری یک فرمول به فرم نرمال عطفی) [۴]: مساله ارضاپذیری بروی n متغیر Boolean که درفرمول φبصورت K-CNF نوشته شده‌اند، به دنبال واگذاری برای$x_1,x_2,\dots x_n$ هستیم، بطوریکه فرمول

$$\varphi(x_1,\dots x_n) = (x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \dots \vee x_{i_k}) \wedge \dots\dots \wedge (x_{j_1} \vee, \dots \vee x_{j_k}) \tag{۲}$$

ارضا شود. یعنی ترکیب عطفی بین تمام Clause ها منجر به مقدار درست شود.

اگرچه درمورد مسائل ساده ازاین دست، یعنی مسائلی که در آنها تعداد قیود یا Clause ها کم می باشند، یافتن این واگذاری دریک زمان مناسب میسراست اما در حالت کلی یافتن پاسخ مستلزم جستجودر یک فضای نمایی است. از آنجاکه φ یک فرمول بروی n متغیر Boolean می‌باشد،2^n واگذاری برای آن قابل تصوراست ویافتن پاسخ در بدترین شرایط مستلزم تست تمام این2^n واگذاری می‌باشد. می‌توان نشان داد که تمام مسائل گستاخ NP دریک زمان چندجمله‌ای قابل تبدیل به فرمی ازK-SAT می‌باشند. بدین جهت می‌گوییم K-SAT یک مسأله NP-Complete است[۲] .

دقت کنید درتعریف K-SAT آنرابصورت یک فرم نرمال عطفی وقتیکه هرclause آن شامل k متغیر می‌باشد، تعریف کرده‌ایم. هراندازه تعداد clauseها دراین مسأله بیشترباشد. یافتن پاسخ برای بدلیل افزایش تعداد قیود دشوارتر خواهد بود. می‌توان نشان دادکه حل پذیری این مسأله یعنی امکان یافتن پاسخ برای آن با پارامتری به نام $\alpha = m/n$ در ارتباط است. وقتیکه m تعداد clause ها وn تعداد

مجله‌ی علمی پژوهش در علوم رایانه ، شماره ۱۵، پاییز ۱۳۹۸، ص ۲۲- ۱۶
ISSN: 2745-3673
http://www.Rcsj.ir

متغیرهای مسأله می‌باشد. درواقع اگرمقدار $n \to \infty$ به ازای یک α_c،مسأله از حالت حل پذیربه حالت حل ناپذیر تبدیل می‌شود[۵]. تحقیق درمورد این پدیده ، یعنی تغیرفاز در مقدار α_c تصویر بسیارعمیق تری رااز ماهیت این مسأله برای دانشمندان ایجاد کرده وامکان استفاده‌از روش های فیزیک آماری رادر یافتن پاسخ ،فراهم آورده است [۵].

مطالعات جدید فازهای مختلفی را برای یافتن پاسخ مساله K-SAT با توجه به افزایش تعداد قیود آن(یعنی تعداد Clauseها) ردیابی کرده اند[۶]. آنچه در تمام اینموارد اهمیت دارد نوع نگاهی است که در سایه الهام از تکنیک های بکاربرده شده در فیزیک آماری به این مساله وجود دارد. در اینجا نیز رفتار عناصر خرد سیستم بدلیل تعداد زیاد کنش ها با یکدیگر، بطور دقیق قابل ردیابی نیست و ما بدنبال نتیجه این تعامل در مقیاس ماکرو هستیم. دقیقا به همین علت است که تمام فرضیاتی که در جهت تقلیل این تعامل گام بر می دارند، به همان اندازه دقت خود را در پیش بینی رفتار آستانه ای مورد نظر در گذار از ناحیه فروقید به ناحیه فراقید از دست می دهند.

در مساله ارضاپذیری یک فرمول نرمال عطفی(K-SAT) ما با تعداد متغیرهای بولین موجود در فرمول n، تعداد لیترال های بکار رفته در هر Clause یعنی k، و تعداد Clause ها که با m نشان داده می شود، مواجه هستیم. بطور شهمودی می توان انتظار داشت که افزایش تعداد قیود m نسبت به درجه آزادی سیستم که در واقع با تعداد متغیرهای آن یعنی n متناسب می باشد، دشواری یافتن راه حل برای این مساله را افزایش می دهد. اولین بار Kirkpatrik و Selman در سال ۱۹۹۴ با استفاده از روشهای عددی و تکنیک های فیزیک آماری از این تغییر فاز در مساله ارضاپذیری فرمول K-SAT پرده برداشتند[۷].

پس از دستاورد آنها، امیدواریهای زیادی بوجود آمد که درک این رفتار آستانه ای بتواند در طراحی الگوریتم های کارآمد برای ردیابی پاسخ در این مساله کارساز باشد. مطالعات بعدی، حقایق بیشتری را از ارتباط میان تفسیر فیزیکی از مساله ارضاء قید K-SAT و پیچیدگی محاسباتی آن آشکار ساخت. Monasson و همکارانش[۸] نشان دادند که نوع تغییر فاز با پیچیدگی محاسباتی مساله در ارتباط است. بدینصورت که پیچیدگی زمانی چند جمله ای در الگوریتم حل مساله همراه با تغییر فاز درجه دوم و پیچیدگی زمانی نمایی با مشاهده تغییر فاز درجه اول همراه می باشند. انتظار غالب بر اینست که با توجه به تمامیت NP در مساله K-SAT، چنین رفتاری در سایر مسائل گستاخ در این خانواده نیز قابل ردیابی باشد.

یافتن مقدار بحرانی برای $\alpha_c = m/n$ که در آن رفتار آستانه ای در گذار از ناحیه فروقید به ناحیه فراقید مشاهده می گردد با استفاده از بعضی فرضیات تسهیل کننده، امکان پذیر می باشد. اگر چه دشواری یافتن کران بالا و پایین برای این مقدار بحرانی یکسان نمی باشد.

اگر $F_K(n, m = \alpha n)$، یک فرمول بصورت K-CNF باشد و اگر Z تعداد واگذاریهای ارضا کننده از مجموع 2^n واگذاری ممکن باشد، بر اساس تعریف α_c در جایی بدست می آید که احتمال واگذاری ارضا کننده بصورت آستانه ای صفر می شود، جائیکه مساله گذار از ناحیه فروقید به فراقید را تجربه می کند. با استفاده از روش گشتاور اول داریم:

$$\Pr[Z > 0] \leq E[Z] \tag{3}$$

اگر هر Clause از K لیترال در یک فرم فصلی تشکیل شده باشد، صرفا یک واگذاری از میان 2^K واگذاری ممکن آن Clause را ارضا نمی کند. بنابراین احتمال ارضا پذیری هر Clause بطور جداگانه برابر است با $\frac{2^K-1}{2^K}$. اگر احتمال ارضا شدن هر Clause را بطور مستقل از Clause دیگر در یک فرمول K-SAT در نظر بگیریم، آنگاه ارضا فرمول به معنی ارضا تمام Clause ها بطور مستقل است. بنابراین احتمال اینکه واگذاری دلخواه σ فرمول F_K را ارضا کند از رابطه زیر بدست می آید:

$$P[Z_\sigma \text{ is satisfied}] = \prod_{i=1}^{m} \Pr(\text{ A clause } C \text{ is satisfied}) = \left(\frac{(2^K-1)}{2^K}\right)^m = \left(\frac{(2^K-1)}{2^K}\right)^{\alpha n} \tag{4}$$

از آنجا که عملگر میانگین بصورت خطی عمل می کند، احتمال ارضا پذیری فرمول یعنی $P[Z > 0]$ منوط به در نظر گرفتن هر یک از 2^n واگذاری مختلف بر روی فرمول خواهد بود. به بیان ریاضی خواهیم داشت:

مجلـه‌ی علمی پژوهش در علوم رایانه ، شماره ۱۵، پاییز ۱۳۹۸، ص ۲۲- ۱۶
ISSN: 2745-3673
http://www.Rcsj.ir

$$E[Z] = E[\sum_\sigma Z_\sigma] = \sum_\sigma \prod_C \Pr[\sigma\ satisfies\ C] = 2^n \left(\frac{(2^K-1)}{2^K}\right)^{\alpha n} \tag{5}$$

بر این اساس آستانه حل پذیری با قرار دادن $E[Z] < 1$ براحتی بدست می آید. خواهیم داشت:

$$(2(1-2^{-K})^\alpha)^n < 1 \Rightarrow \alpha_c \le \frac{-\ln 2}{\ln(1-2^{-K})} \tag{6}$$

اگر چه این کران بالا، یک کران بالای بسته نیست و عملا مقدار بحرانی α، به ازای مقدار کمتری از برآورد فوق روی می دهد. این تقریب ناشی از فرضیه ساده کننده ایست که در مورد استقلال Clause ها برای محاسبه α_c از آن استفاده شده است. در واقع این برآورد از اساسی ترین عامل بروز پیچیدگی در مساله که تعامل و کنش قیود با یکدیگر می باشد، صرفنظر کرده است و به همین جهت مقدار آستانه ی محاسبه شده یک برآورد بیشینه می باشد.

بدست آوردن کران پایین برای ارضاپذیری فرمول K-SAT دشواری بیشتری دارد و محاسبه آن متضمن استفاده از روش گشتاور دوم است که بر اساس آن داریم:

$$\Pr[Z > 0] \ge \frac{E[Z]^2}{E[Z^2]} \tag{7}$$

در اینجا نیز از همان پیش فرض استقلال Clause ها از یکدیگر استفاده می شود. اما نکته جالب اینجاست که دوباره الهام از فیزیک در این محاسبه نیز کارساز است. با انجام محاسبات سودمند ریاضی و استفاده از فرمول استرلینگ می توان نشان داد که گشتاور دوم مورد محاسبه در این روش با آنتروپی میزان اشتراک متغیرها بین Clause ها متناسب است و هر چقدر این آنتروپی بیشتر باشد، مقدار $E[Z^2]$ افزایش و در نتیجه کران پایین کاهش بیشتری می یابد. در واقع عدم قطعیت بیشتر با افزایش آنتروپی به معنای میزان بالاتر اشتراک متغیرها بین دو Clause و همبستگی آنها با یکدیگر، کار را برای تقلیل فاصله میان کران بالا و کران پایین دشوارتر می کند. در واقع دوباره این افزایش همبستگی ناشی از افزایش قیود است که در اینجا نیز اساسی ترین عامل ایجاد پیچیدگی می باشد[۹].

اخیرا نشان داده شده است که این رفتار آستانه ای، یعنی گذار از حالت فروقید به حالت فراقید و بالطبع ماهیت آستانه ای احتمال یافتن پاسخ برای هر یک از مقادیر بزرگ K موجود است[۱۰].

باید توجه داشت که دشواری برای یافتن پاسخ مساله با نگاه الگوریتمیک به معنی عدم توانایی یافتن پاسخ توسط یک الگوریتم با پیچیدگی زمانی چند جمله ای است. در واقع می توان شرایط آستانه ای برای حل پذیری مساله را با در نظر گرفتن فازهای دیگر تظریف کرد. یعنی علاوه بر α_c که در بعضی از منابع با α_s نیز نشان داده می شود، می توان α_a را در نظر گرفت که به ازای چگالی قیود بیشتر از α_a، نتوان با استفاده از الگوریتم کارآمد یعنی الگوریتمی با پیچیدگی چند جمله ای، پاسخ مساله ارضاپذیری را بدست آورد. دشواری این طبقه بندی آنست که هر الگوریتمی بر اساس مکانیزم جستجو، دارای آستانه ای وابسته به مکانیزم مورد استفاده ی خودش می باشد[۶].

البته در اینحالت هم رفتار آستانه ای زمانی قابل ردیابی است که n، یعنی تعداد متغیرهای موجود در فرمول مقدار زیادی را اتخاذ نماید. می توان انتظار داشت که برای بیشتر الگوریتم ها α_a^{ALG} مقداری به مراتب کمتر از α_c یا α_s داشته باشد. این تعمیق مطالعه در خصوص فازهای مختلف رفتاری با افزایش مقدار α، درک بسیار عمیق تری نسبت به مساله و منبع بروز پیچیدگی در اختیار ما قرار می دهد.

استفاده از تکنیک های فیزیک آماری نه تنها در مورد ماهیت تغییر فاز و ارتباط آن با پیچیدگی مورد انتظار از مساله نقش آفرین می باشد، بلکه در تعیین نمونه مورد استفاده برای ارزیابی یک الگوریتم نیز راهنمایی های بسیار سودمندی ارائه می دهد[۵].

استفاده از روشهای منبعث از فیزیک آماری(Cavity Method) این امکان را فراهم کرده است تا تغییرات فضای حالت مساله با افزایش چگالی قیود مورد بررسی قرار بگیرد[۱۱,۱۲]. بر این اساس تکامل یا دگردیسی فضای حالت مساله با افزایش چگالی قیود، بدینگونه است. به ازای مقادیر کوچک α، پاسخها به یکدیگر متصل هستند و تشکیل یک خوشه را می دهند. این به معنی آنست که به لحاظ

مجلـه‌ی علمی پژوهش در علوم رایانه ، شماره ۱۵، پاییز ۱۳۹۸، ص ۲۲- ۱۶
ISSN: 2745-3673
http://www.Rcsj.ir

تکنیکی فاصله همینگ میان پاسخها از رده $o(n)$ می باشد. با افزایش چگالی قیود، این خوشه ها دچار واپاشی شده و به تعداد زیادی خوشه بسیار کوچک با فاصله همینگ زیاد $O(n)$، تبدیل می شوند.

همزمان با این دگردیسی در فضای پاسخ، می توان در این خوشه های کوچک و دورافتاده از یکدیگر، متغیرهای منجمد را ردیابی کرد. وجود این متغیرهای منجمد که در تمام واگذاریهای ارضا کننده یک مقدار را اتخاذ می کنند، یک علامت پاتولوژیک برای عدم توانایی ردیابی پاسخها با استفاده از الگوریتم های کارآمد(الگوریتم های جستجو با پیچیدگی زمانی چند جمله ای) شمرده می شود. این انجماد در کنار رشد فاصله همینگ در پاسخهای ارضا کننده با افزایش چگالی قیود به معنای فقدان کارایی جستجوهای محلی یا هر جستجویی است که بدنبال پاسخ در یک همسایگی نزدیک از پاسخ فعلی میگردد[۱۳].

اگر $\underline{X}$ برداری باشد که پاسخ یک مساله K-SAT را بر روی n متغیر نشان میدهد و اگر $E(\underline{X})$ با الهام از روشهای بکارگرفته شده در فیزیک بصورت تعداد Clause ها یا قیود ارضا نشده تعریف شود، بدیهی است که یافتن پاسخ متناظر با رسیدن به انرژی صفر برای تابع $E(\underline{X})$ می باشد. در واقع افزایش چگالی قیود و تزاید نمایی خوشه های کوچک شده پاسخ، همراه با افزایش فاصله همینگ پاسخها از یکدیگر متناظر با افزایش تعداد می نیمم های محلی برای تابع $E(\underline{X})$ است که تعداد Clause های ارضا نشده را می شمارد. بدین ترتیب حل مساله در اینجا متناظر با یافتن حالت پایه(Ground State) برای تابع متناظر با سیستم می باشد و دشواری یافتن راه حل به معنی عبور از تعداد می نیمم های محلی این تابع است که بصورت نمایی رشد کرده اند. این دیدگاه فیزیکی منجر به شناخت بسیار عمیق تری از مساله ارضاء قید و ماهیت بروز پیچیدگی در آن شده است.

تفسیر فیزیک مساله: بدست آوردن Hamiltonian متناظر با یک فرمول K-SAT

در حالت کلی با استفاده از تئوری Reduction در پیچیدگی محاسباتی می توان نشان داد که بسیاری از مسائل دشوار قابل تبدیل به مساله یافتن Min یا Max مطلق یک تابع پیچیده می باشند[۴,۱]. این رهیافت کلی تاکنون نتایج بسیار چشمگیری داشته است و منجر به یافتن ارتباطات عمیقی میان استفاده از روشهای رایج در فیزیک آماری برای حل مسائل دشوار بهینه سازی شده است[۱۴,۱۵]. در واقع این فرمولبندی به ما اجازه می دهد که حل مساله K-SAT را در پیوند با ابر قضیه ای در فیزیک بررسی کنیم که تمایل سیستمها برای رسیدن به حالت پایه(Ground State) را نشان می دهد.

در مساله K-SAT یافتن این تابع، یا در واقع Hamiltonian سیستم از دیدگاه فیزیکی دشوار نیست. اگر اتخاذ مقدار درست برای متغیر بولین در یک فرمول به فرم نرمال عطفی بر روی n متغیر با 1+ و اتخاذ مقدار غلط با 1- نشان داده شود و ماتریس کنترل w را برای فرمول نرمال عطفی به صورت زیر تعریف کنیم. دراینجا فرض می‌کنیم تعداد clause های موجود درفرمول m می‌باشد[۵].

$$w_{m*n}=\begin{cases} w_{ji}=+1 & \text{if clause j includes literal } x_i \\ w_{ji}=-1 & \text{if clause j includes literal } \overline{x_i} \\ w_{ji}=0 & otherwise \end{cases} \quad (8)$$

آنگاه متغیر مشخصه ی Clause، jام را می توان بصورت زیر معرفی کرد:

$$V_j=\frac{1}{2^k}\prod_{i=1}^{n}(1-w_{ji}\,x_i) \quad (9)$$

در فرمول ۹، تقسیم بر مقدار 2^K به علت در نظر گرفتن k لیترال در هر *Clause* می باشد. در صورتیکه هر لیترال به فرم x_i در *clause* وجود داشته باشد، با اتخاذ مقدار *1+* آن *Clause* را ارضا می کند و این به معنی صفر شدن متغیر مشخصه ی مربوط به آن *Clause* است. همینطور در صورتیکه لیترال به فرم $\overline{x_i}$ باشد، اتخاذ مقدار -1 توسط آن منجر به ارضا شدن *Clause* و بالطبع صفر شدن متغیر مشخصه وابسته به آن *Clause* می شود. بدین ترتیب ارضا هر *clause* سهمی در افزایش تابع انرژی وابسته به سیستم که با معادله (۱۰) نشان داده می شود، نخواهد داشت.

ISSN: 2745-3673
http://www.Rcsj.ir

$$E_{k-SAT} = \sum_{j=1}^{m} V_j = \frac{1}{2^k} \sum_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} (1 - w_{ji} x_i) \tag{10}$$

در صورتیکه هیچکدام از لیترال ها شرکت کننده در یک *clause* نتوانند منجر به ارضا شدن آن شوند مقدار عبارت $(1 - w_{ji} x_i)$ متناظر با آنها برابر با ۲ خواهد بود و در نتیجه اگر یک *Clause* ارضا نشود مقدار 2^K را تولید خواهد کرد که در نهایت با توجه به تقسیم بر 2^K، منجر به افزایش یک واحدی سطح تابع انرژی خواهد شد. بنابراین به وضوح می توان دیدکه حل مساله *K-SAT* در گرو یافتن کمینه ی *Hamiltonian* فوق می باشد.

نتیجه گیری

زمانی یافتن کمینه تابع E_{k-SAT} بدلیل افزایش چگالی قیود، دشوار می شود که با توجه به تفسیر ارائه شده از دگردیسی فضای حالت، این فضا به خوشه ای کوچک زیادی تبدیل می شود که فاصله همینگ پاسخها بین این خوشه ها از رده $O(n)$ می باشد و این معنای وجود تعداد زیادی می نیمم محلی است که گام برداری تصادفی با تغییر جزیی فاصله همینگ از راه حل کنونی قادر به ردیابی آن نمی باشد.

به بیان دیگر مشکل یافتن می نیمم مطلق این تابع، وجود زیر مجموعه ای از متغیرهاست که بشدت به یکدیگر وابسته هستند، بطوریکه تغییر یکی از آنها برای ارضاء یک *Clause* موجب عدم ارضاء *Clause* دیگر می شود. این وابستگی ها کار فرآیندهای جستجوی محلی را بسیار دشوار می کنند چرا که دیگر نمی توان پاسخ مناسب را در مجاورت پاسخ کنونی یافت. در واقع فاصله همینگ میان دو واگذاری که یکی *m-1*، *Clause* را ارضا و دیگری تمام *Clause* ها را ارضا می کند از $o(n)$ به $O(n)$ افزایش می یابد. مصادف با این رویداد عبور از روی می نیمم های محلی برای رسیدن به *Min* مطلق به لحاظ شکل گیری زیر مجموعه هایی از متغییرها که دارای مقادیر یکسان برای تمام واگذاریهای ارضا کننده می باشند، دشوار می گردد. به این زیر مجموعه های منجمد از متغیرهای موجود در فرمول *Backbone* می گویند[۸].

اگر چه بطور شهودی انتظار بر این است که با افزایش اندازه ی *Backbone* یافتن راه حل بدلیل هرس شدن فضای حالت ساده تر شود، اما از آنجا که این قیود نمی توانند منجر به ارائه ی راهنمایی مطلق برای یافتن پاسخ در فضای حالت شوند، بر دشواری یافتن پاسخ می افزایند. هر چقدر اندازه این *backbone* افزایش یابد، هرس فضای نمایی مساله دشوارتر خواهد بود، چرا که داریم:

$$\lim_{K \to n} \sum_{i=0}^{K} \binom{n}{i} \to 2^n$$

ISSN: 2745-3673
http://www.Rcsj.ir

منابع و مراجع

[1] S. Arora and B. Boaz, "Computational Complexity: A Modern Approach", Cambridge University Press, 2009.
[2] J. Hromkovic, "Theoretical Computer Science, Springer, 2010.
[3] G. Chaitin, "Thinking about Godel and Turing: Esays on Complexity", Word Scientific, 2007.
[4] J. Hromkovic, "Algorithms for Hard Problems: Introduction to Combinatorial Optimization, Randomization, Approximation and Heuristics", Springer, 2004.
[5] A. Percus, G. Istrate, C. Moore(Editors), "Computational Complexity and Statistical Physics", Oxford University Press, 2006.
[6] R. Marino, G. Prisi, F. Ricci-Tersenghi, "The Backtracking Survey Propagation Algorithm for Solving Random K-SAT Problems", Nature Communication, Vol. 7, 12996, 2016.
[7] S. Kirkpatrick, B. Selman, "Critical Behavior in The Satisfiability of Random Boolean Expression", Science, Vol. 264, pp. 1297-1301, 1994.
[8] R. Monasson, R. Zecchina, S. Krikpatrick, B. Selman, L. Troyansky, "Determining Computational Complexity from Characteristic Phase transitions", Nature, Vol. 400, pp. 133-137, 1999.
[9] M. Mezard, A. Montanari, "Information, Physics and Computation", Oxford University Press, 2009.
[10] J. Ding, A. Sly, N. Sun, "Proof of The Satisfiability Conjecture for Large K", Proceedings of the Forty-Seventh Annual ACM on Symposium on The Theory of Computing, USA, 2015.
[11] S. Mertens, M. Mezard, R. Zecchina, "Threshold Values of Random K-SAT from the Cavity Method", Random structures and Algorithms, Vol. 28, pp. 340-373, 2006.
[12] A. Montanari, F. Ricci-Tersenghi, G. Semerjian, "Clusters of Solutions and Replica Symmetry Breaking in Random K-Satisfiability", Journal of Statistical Mechanics, pp. 04004, 2008.
[13] D. Achlioptas, F. Ricci-Tersenghi, "On The Solution-Space geometry of Random Constraint satisfaction Problems", Proceedings of the Thirty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Seattle, 2006.
[14] J.H. Zhao, H.J. Zhou, "Statistical Physics of Hard Combinatorial Optimization: Vertex Cover Problem", Chinese Physics B, Vol. 23, N. 7, 2014.
[15] L. Zdeborova, "Statistical Physics of Hard Optimization Problems", Phd thesis, Charles University of Prague, 2008.