ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir

مجله‌ی علمی پژوهش در علوم رایانه (سال پنجم)
شماره ۱۷ / بهار ۱۳۹۹ / ص ۷۶- ۶۰

حل مسائل انتگرال فردهلم نوع اول به کمک الگوریتم فرا اکتشافی جستجوی فاخته اصلاح شده

حسین رحیمی[1]، رضا پورقلی[2]

[1] کارشناس ارشد، گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان.

[2] استاد، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه دامغان.

نام نویسنده مسئول:

حسین رحیمی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۲۱
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۳/۶

چکیده

هدف در این مقاله، حل یک مسأله انتگرال فردهلم نوع اول به کمک الگوریتم فرا اکتشافی جستجوی فاخته اصلاح شده است. معمولا حل تحلیلی معادلات انتگرال دو بعدی مشکل و بسیار پیچیده می باشد و از این رو برای حل این چنین مسائل از روش‌های عددی استفاده می‌شود. روش‌های عددی بسیاری وجود دارد که هرکدام دارای دقت متفاوتی هستند. اما روش ارائه شده در این مقاله دارای مزیت‌هایی نسبت به سایر روش‌های موجود می‌باشد. پیاده‌سازی آن‌ها ساده‌تر ، زمان اجرای کمتر و تقریب حاصله بهتر می‌باشد. روش حل مسئله به کمک الگوریتم ارائه شده به این صورت است که ابتدا در فضای مسئله چند جواب احتمالی را حدس میزنیم، بعد از آن با استفاده از تابع هزینه که خود شامل چندین روش عددی است به ارزیابی جواب های حدس زده می پردازیم سپس با حذف جواب هایی با دقت کمتر سعی در رسیدن به بهترین جواب با کمترین هزینه را داریم. در آخر با حل چند مثال به مقایسه بین جواب واقعی و جواب به دست آمده از این الگوریتم پرداخته ایم که نتایج به صورت قابل توجهی دقیق و با سرعت بالا به دست آمده است.

واژگان کلیدی: معادله‌دیفرانسیل، روش جستجوی فاخته، انتگرال فردهلم نوع اول.

ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir

مقدمه

داده کاوی به دلیل حجم زیاد داده ها و ضرورت تبدیل این داده ها به اطلاعات مفید سریع ترین زیر حوزه رو به رشد فناوری محسوب می شود[۱]. داده کاوی شامل پیش پردازش چندگانه، ارائه دانش و همچنین ارزیابی الگو می گردد[۲]. یکی از مراحل پیش پردازش اصلی انتخاب ویژگی نام دارد که هدف آن فیلتر کردن ویژگی های غیر مرتبط مجموعه داده های مسئله است[۳].وجود مقادیر کلان داده های موجود در فضای مسئله و حضور داده های غیر بهینه ، روند تحلیل آنها را چالش برانگیز و اغلب نادرست می سازد[۴].

نظریه معادلات انتگرال، یکی از شاخه های آنالیز ریاضی است که اصولا اهمیت آن در ارتباط با مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی معادلات با مشتقات جزئ مشخص می شود[۵]. در زمینه های مختلفی از علوم با معادلات انتگرال مواجه می شویم. معادلات انتگرال کاربردهای بیشماری در لاستیک، انعطاف پذیزی، دینامیک، تئوری پالایش، انتقال گرما، الکترو استاتیک، اقتصاد، بیومکانیک، تئوری بازی، کنترل،مهندسی مکانیک،ا قتصاد،داروسازی و غیره دارد[۶] ،[۷]. همچنین جواب های دقیق معادلات انتگرال نقش مهمی را در درک صحیح ویژگی های کیفی پدیده ها و پردازش ها در بخش های مختلف علوم طبیعی ایفا می کنند. معمولا حل تحلیلی معادلات انتگرال دو بعدی مشکل و بسیار پیچیده می باشد. بنابراین نیاز به روش های تقریبی و تکنیک های عددی برای رسیدن به یک راه حل مناسب بسیار احساس می شود.در سال های اخیر ریاضیدانان و فیزیکدانان تلاش قابل توجهی برای مطالعه راه حل های عددی معادلات انتگرالی دو بعدی از خود نشان داده اند.برای مثال چند روش قدرتمند که در این مقاله نیز از آنها استفاده شده است شامل روش چبیشف[۶]، روش تیولر[۷] و ... است.

پیش از هرکاری به معرفی معادله انتگرال و انواع آن می پردازیم.

معادله انتگرال:

یک معادله انتگرال استاندارد به فرم

رابطه(۱)

$$u\ (x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x.t)\, u(t) dt$$

می باشد که $g(x)$ و $h(x)$ حد های انتگرال و λ مقداری ثابت می باشد.در معادله ی انتگرال $k(x.t)$ تابعی با دو متغیر x و t می باشد که به آن هسته ی معادله ی انتگرال گویند و $f(x)$ تابعی معلوم بر حسب x و $u(x)$ تابعی مجهول است که به دنبال آن هستیم،این تابع هم زیر انتگرال هم بیرون آن وجوددارد. همچنین حدود انتگرال میتوانند مقادیر ثابت یا متغیر باشند[۸].

معادله ی انتگرال نوع اول و دوم:

معادلات انتگرال به طور کلی به دو نوع اول یا دوم تقسیم بندی می شوند که به شرح زیر است:

اگر در یک معادله ی انتگرال $u(x)$ تنها زیر انتگرال ظاهر شود معادله ی انتگرال را، معادله ی انتگرال نوع اول می نامند. که به صورت

رابطه(۲)

$$f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x.t)\, u(t)\, dt = 0$$

تعریف می شود.

همچنین اگر در یک معادله ی انتگرالی $u(x)$ هم زیر انتگرال و هم خارج از آن ظاهر شود معادله ی انتگرال را، معادله ی انتگرال نوع دوم می نامند.فرم کلی معادلات انتگرال نوع دوم به صورت.

مجله‌ی علمی پژوهش در علوم رایانه، شماره ۱۷، بهار ۱۳۹۹، ص ۷۶- ۶۰
ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir

رابطه(۳)

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x.t)\, u(t)\, dt$$

می باشد.

معادلات انتگرال- دیفرانسیل

معادلات انتگرال- دیفرانسیل نوعی از معادلات انتگرالی هستند که $u(x)$ مجهول زیر انتگرال است و مشتق مرتبه ی nام تابع $u(x)$ نیز بیرون انتگرال می باشد. معادلات انتگرال- دیفرانسیل به فرم کلی :

رابطه(۴)

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} k(x.t)\, u(t)\, dt$$

می باشد.

معادلات انتگرالی برحسب حدود انتگرال به دو نوع معادلات انتگرالی ولترا یا فردهلم تقسیم می شوند.

معادلات انتگرال ولترا

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی ولترا (معادلاتی که حد پایین یا حد بالای انتگرال گیری در آن به صورت تابعی از $u(x)$ ظاهر میشود)به فرم زیر می باشد:

رابطه(۵)

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} k(x.t)\, u(t)\, dt$$

حالت های خاص معادلات انتگرال ولترا:

الف)اگر $\phi(x) = 0$ باشد، معادله ی انتگرال را معادله ی انتگرال ولترای نوع اول می نامند.

رابطه(۶)

$$f(x) + \lambda \int_{a}^{x} k(x.t)\, u(t)\, dt = 0$$

ب) اگر $\phi(x) = 1$ باشد، معادله ی انتگرال را معادله ی انتگرال ولترای نوع دوم می نامند.

رابطه(۷)

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} k(x.t)\, u(t)\, dt$$

ج)اگر مقدار $f(x) = 0$ باشد، آنگاه معادله را معادله ی انتگرال ولترای همگن می نامیم که به صورت:

رابطه(۸)

$$u(x) = \lambda \int_{a}^{x} k(x.t)\, u(t)\, dt$$

می باشد.

د) معادله انتگرال- دیفرانسیل ولترا نیز به صورت زیر خواهد بود.

رابطه(۹)

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{x} k(x.t)\, u(t)\, dt$$

ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir

معادلات انتگرال فردهلم

شکل استاندارد معادلات انتگرال خطی فردهلم، که در آن ها حد پایین و حد بالای انتگرال گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند به صورت زیر می باشد[۸]:

رابطه (۱۰)

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x.t)\, u(t)\, dt$$

حالت های خاص معادلات انتگرال فردهلم:

الف)اگر $\phi(x) = 0$ ، معادله ی انتگرالی را یک معادله ی انتگرال فردهلم نوع اول می نامیم، که به صورت:

رابطه (۱۱)

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x.t)\, u(t)\, dt = 0$$

می باشد.

ب)اگر $\phi(x) = 1$ ، معادله ی انتگرالی را یک معادله ی انتگرال فردهلم نوع دوم می نامیم معادله ی انتگرالی زیر فرم کلی از یک معادله ی انتگرال فردهلم نوع دوم می باشد.

رابطه (۱۲)

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x.t)\, u(t)\, dt$$

ج)اگر در معادله ی انتگرال فردهلم $f(x) = 0$ باشد، معادله به صورت زیر در خواهد آمد:

رابطه (۱۳)

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x.t)\, u(t)\, dt$$

که آن را معادله انتگرال فردهلم همگن گویند.

د) معادله انتگرال- دیفرانسیل فردهلم نیز به صورت زیر خواهد بود:

رابطه (۱۴)

$$u^{(n)}(x) = \mathrm{f}(x) + \lambda \int_a^b k(x.t)\, u(t)\, dt$$

معادلات انتگرال منفرد

درصورتی که یکی از حدود انتگرال یا هردو ∞ باشند و یا هسته ی معادلات انتگرال یعنی $k(x.t)$ در فاصله ی انتگرال گیری نقاط انفصال داشته باشد، معادله انتگرال را منفرد گویند.

معادلات انتگرال

رابطه (۱۵)

$$u(x) = \int_0^\infty (x-t)^\alpha u(t)\, dt$$

و

رابطه (۱۶)

$$u(x) = \int_0^\infty \frac{u(t)}{\sqrt{(x-t)}}\, dt$$

نمونه ای از معادلات انتگرال منفرد هستند.

ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir

در این مقاله حل معادلات انتگرالی فردهلم نوع اول با استفاده از الگوریتم بهینه سازی فاخته اصلاح شده مورد بررسی قرار می گیرد.

روش های حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع اول

برای حل معادلات انتگرالی روش های مختلفی مانند روش چبیشف[۵]، روش ماتریس تیلور[۷]،روش تاو محاسباتی[۸]، روش توابع کُلاهی اصلاح شده[۹]، روش گالرکین[۱۰]، روشهای نیستروم[۱۱]،[۱۲]، و روش بسط خطای مجانبی[۱۳] و ... بیان شده است، برای استفاده از روش های ذکر شده باید ابتدا انتگرال را به نوع دوم در بیاوریم سپس از روش های حل استفاده کنیم. معایب استفاده از این روش ها زمان زیاد، دقت کم نسبت به روش ارائه شده و حجم محاسبات زیاد است.

الگوریتم جستجوی فاخته اصلاح شده

معرفی الگوریتم بهینه سازی فاخته:

روش جستجوی فاخته(CS) یک روش بهینه سازی فرا اکتشافی است که رویکردی تکاملی در جستجوی راه حل بهینه دارد و در سال ۲۰۰۹توسط شین او یانگ و دب ساوش توسعه یافته است.الگوریتم فاخته بعدها در سال ۲۰۱۱ توسط رامین رجبیون به طور کامل با جزئیات بیشتر مورد بررسی قرار گرفت [۱۴]. الگوریتم فاخته با الهام از زندگی گونه ای از پرندگان به نام فاخته گرفته شده است. همانند سایر الگوریتم های تکاملی این روش هم با یک جمعیت اولیه کار خود را شروع می کند.

این جمعیت از فاخته ها تعدادی تخم دارند که آنها را در لانه تعدادی پرنده ی میزبان خواهند گذاشت.تعدادی از این تخم ها که شباهت بیشتری به تخم های پرنده میزبان دارند شانس بیشتری برای رشد و تبدیل شدن به فاخته بالغ خواهند داشت. سایر تخم ها توسط پرنده میزبان شناسایی شده و از بین می روند. میزان تخم های رشد کرده، مناسب بودن لانه های آن منطقه را نشان می دهند. هرچه تخم های بیشتری در یک ناحیه قادر به زیست باشند و نجات یابند به همان اندازه سود (تمایل) بیشتری به آن منطقه اختصاص می یابد. بنابراین موقعیتی که در آن بیشترین تعداد تخم ها نجات یابند پارامتری خواهد بود که قصد بهینه سازی آن را دارد.

تولید محل های سکونت اولیه فاخته ها (جمعیت اولیه جواب های کاندید)

برای حل یک مساله بهینه سازی لازم است تا مقادیر متغیرهای مساله به فرم یک آرایه شکل گیرند. در GA و PSO این آرایه ها با نام های "کروموزوم" و "موقعیت ذرات" مشخص می شوند. ولی در الگوریتم بهینه سازی فاخته این آرایه habitat یا "محل سکونت" نام دارند. در یک مسئله بهینه سازی Nvar بعدی یک habitat آرایه $1 \times Nvar$ خواهد بود که موقعیت فعلی زندگی فاخته ها را نشان می دهد. این آرایه به شکل زیر تعریف می شود:

رابطه(۱۷)

$$\textbf{Habitat} = [x_{1}, x_{2}, \ldots, x_{Nvar}]$$

میزان مناسب بودن (یا مقدار سود) در habitat فعلی با ارزیابی تابع سود(fp) در habitat به دست می آید. بنابراین:

رابطه(۱۸)

$$\textbf{Profit} = \textbf{fp (habitat)} = \textbf{fp}\ (x1, x2, \ldots, xNvar)$$

همانطور که دیده می شود جستجوی فاخته الگوریتمی است که تابع سود را ماکزیمم می کند. برای استفاده از این روش به منظور حل مسائل کمینه سازی کافی است یک علامت منفی در تابع هزینه ضرب کنیم. برای شروع الگوریتم بهینه سازی یک ماتریس habitat به سایز $Npop \times Nvar$ تولید می شود. سپس برای هر کدام از این habitat ها تعدادی تصادفی تخم تخصیص می یابد.

ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir

در طبیعت هر فاخته بین ۵ تا۲۰ تخم می گذارد. این اعداد به عنوان حد بالا و پایین تخصیص تخم به هر فاخته در تکرارهای مختلف استفاده می شود.دیگر عادت هر فاخته حقیقی این است که، در یک دامنه مشخص تخم های خود را می گذارند که به آن حداکثر دامنه تخمگذاریی (ELR) گفته می شود.در یک مساله بهینه سازی هر متغیر دارای حد بالا Varhi و حد پایین Varlow است که هر ELR با استفاده از این حدود قابل تعریف خواهد بود. ELR متناسب است با تعداد کل تخم ها، تعداد تخم های فعلی فاخته و همچنین حد بالا و پایین متغیرهای مساله.

رابطه(۱۹)

$$\mathbf{ELR}= \boldsymbol{\alpha} \times \left(\frac{\textit{number of current cuckoss eggs}}{\textit{total number of eggs}} \right) \times \mathbf{(Var_{hi}\text{-}Var_{low})}$$

α متغییری است که حد اکثر مقدار ELR با آن تنظیم می شود.

روش تخمگذاری فاخته ها

هر فاخته به صورت تصادفی تخم هایی را در لانه پرندگان میزبان که در ELR خود قرار دارد، می گذارد. وقتی تمام فاخته ها تخم های خود را گذاشتند، برخی از تخم ها که کمتر شبیه تخم های پرندۀ میزبان هستند، شناسایی شده و از لانه بیرون انداخته می شوند.بنابراین بعد از هر تخمگذاری **p**٪ از تمام تخم ها (معمولا ٪ ۱۰) که مقدار تابع سود آن ها کمتر است نابود می شوند .بقیه جوجه ها در لانه های میزبان تغذیه شده و رشد می کنند. نکته دیگر اینکه در هر لانه فقط یک تخم وجود دارد که در الگوریتم اینطور تعریف می شود که هر موقعیت جواب فقط یک بار مورد بررسی قرار می گیرد.

ملاحظه۱:

به هر فاخته با توجه به میزان برازندگی تعدادی تخم اختصاص می دهیم هر چه برازندگی فاخته ای بیشتر باشد تعداد تخم های اختصاص یافته به آن فاخته (که باید بین max و min تعداد تخم های قابل اختصاص باشد) بیشتر خواهد بود.

مهاجرت فاخته ها

وقتی جوجه فاخته ها رشد کردند و بالغ شدند مدتی در محیط ها و گروه های خودشان زندگی می کنند ولی وقتی زمان تخمگذاری نزدیک می شود به habitat های بهتر که در آنجا شانس زنده ماندن تخم ها بیشتر است مهاجرت می کنند. پس از تشکیل گروه های فاخته در مناطق مختلف زیست کلی (فضای جستجوی مساله)، گروه دارای بهترین موقعیت به عنوان نقطه هدف برای سایر فاخته ها، جهت مهاجرت انتخاب می شود. از آنجایی که فاخته های بالغ در اقصی نقاط محیط زیست زندگی می کنند تشخیص اینکه هر فاخته به کدام گروه تعلق دارد، کار سختی است. برای حل این مشکل، گروه بندی فاخته ها توسط روش کلاس بندی K-means انجام می شود.

حال که گروه های فاخته تشکیل شدند، سود میانگین گروه محاسبه می شود تا بهینگی نسبی محل زیست آن گروه بدست آید. سپس گروهی که دارای بیشترین مقدار متوسط سود می باشد، به عنوان گروه هدف انتخاب شده و گروه های دیگر به سمت آن مهاجرت می کنند. یکی از نقاط قوت در این روش ، مهاجرت فاخته ها به سمت گروه هدف می باشد، به این صورت که فاخته تمام مسیر به سمت محل هدف طی نمی کنند. آنها فقط قسمتی از مسیر را طی کرده و در آن مسیر هم انحرافی دارند. هر فاخته فقط **λ**٪ از کل مسیر را به سمت هدف ایده آل فعلی طی می کند و یک انحراف **ϕ** رادیان نیز دارد. این دو پارامتر به فاخته ها کمک می کنند تا محیط بیشتری را جستجو کنند. اینجا **λ**عددی تصادفی بین ۰و ۱است و **ϕ** عددی بین **π/6** و **-π/6** است.

ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir

ملاحظه۲:

در روش اصلاح شده در هر تکرار شعاع رفته رفته کوچکتر می شوند به این منظور که هرچه به جواب نزدیک تر می شویم تخم ها در فضای کمتری قرار داده شوند و نقطه بهینه کلی به صورت دقیق تری حاصل شود.

از بین بردن فاخته های قرار گرفته در مناطق نامناسب

با توجه به این واقعیت که همیشه تعادلی بین جمعیت پرندگان در طبیعت وجود دارد عددی مثل max حداکثر تعداد فاخته هایی را که می توانند در یک محیط زندگی کنند کنترل و محدود می کند.بنابراین در هر تکرار حداکثر به تعداد max ، جواب پیشنهادی وجود خواهد داشت و اگر جواب ها بیشتر از این تعداد باشد جواب هایی که هزینه مناسبی ندارند حذف می شوند.

همگرایی الگوریتم

پس از چند تکرار، تمام جمعیت فاخته ها به یک نقطه بهینه با حداکثر شباهت تخم ها به تخم های پرندگان میزبان و همچنین به محل بیشترین منابع غذایی می رسند. این محل بیشترین سود کلی را خواهد داشت و در آن کمترین تعداد تخم ها از بین خواهند رفت. بنابراین گام های اصلی را میتوان به صورت زیر بیان نمود:

گام ۱: مکان های سکونت فعلی فاخته ها را به صورت تصادفی مشخص نمایید.

گام ۲:تعدادی تخم به هر فاخته اختصاص دهید.

گام ۳:شعاع تخمگذری هر فاخته را تعیین نمایید.

گام ۴:فاخته ها در لانه های میزبانانی که در شعاع تخمگذاری آن ها قرار دارند، تخمگذاری می کنند.

گام۵:تخم هایی که توسط پرندگان میزبان شناسایی می شوند از بین می روند.

گام۶:تخم فاخته هایی که شناسایی نشده اند پرورش میابند.

گام۷:محل سکونت فاخته های جدید را ارزیابی نمایید.

گام۸:ماکزیمم تعداد فاخته هایی که در هر مکان زندگی دارند را مشخص نمایید و آنهایی را که در مکان های نامناسب هستند از بین ببرید.

گام۹:فاخته ها را با استفاده از روش K-means خوشه بندی کرده و بهترین گروه فاخته را به عنوان مکان سکونت هدف، مشخص نمایید.

گام۱۰:جمعیت جدید فاخته ها به سمت مکان هدف حرکت می کند.

گام۱۱:اگر شرط توقف برقرار گردیده توقف، در غیر اینصورت به گام۲بروید.

حل معادلات انتگرالی فردهلم نوع اول با استفاده از الگوریتم فاخته

مراحل اجرای الگوریتم فاخته اصلاح شده با مقادیر حقیقی را می توان به صورت زیر در نظر گرفت.

۱) مشخص کردن محل سکونت هر فاخته بنا به ابعاد مسئله.

برای به دست آوردن چند جمله ای مناسب ، ابتدا مشخص می کنیم که آرایه های محل های سکونت چند بعدی باشند برای مثال اگر چند جمله ای از درجه ۲ را تست می کنیم باید ابعاد آرایه ۱×۳ باشد(ضرایب چند جمله ای).

۲) تبدیل آرایه های محل سکونت به چندجمله ای.

بعد از به دست آوردن آرایه های کاندید آنها را به عنوان ضرایب چند جمله ای خود در نظر میگیریم.در تابع هزینه ای که نوشته ایم چندین روش برای تخمین چند جمله ای مناسب قرار دارد برای مثال روش چبیشف که یک دنباله از چندجمله‌ای‌های متعامد هست و به صورت بازگشتی محاسبه می‌شود. پس از حل تعداد بسیار زیادی مسئله به کمک این

مجلـه‌ی علمی پژوهش در علوم رایانه، شماره ۱۷، بهار ۱۳۹۹، ص ۷۶- ۶۰
ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir

الگورتیم دریافتیم که بعد از حدودا ۲۰ تکرار با دقت بسیار نزدیک می توانیم حدس بزنیم که آیا روش انتخابی به چند جمله ای مناسب می رسد یا نه.به همین منظور می توانیم در تابع هزینه ، کد را به صورتی بنویسیم که اگر در استفاده از یک روش به دقت معین شده در تکرار ۲۰ نرسید روش های بعدی را امتحان کند و بهترین جواب را نشان بدهد.

۳) محاسبه تابع هزینه و ارسال مقدار آن به برنامه اصلی.

پس از به دست آوردن چند جمله ای در هر مرحله ، برای بررسی دقت به صورت گسسته در ده نقطه به حل معادله می پردازیم. اگر تقریب به دست آمده از مقداری که در اول برنامه مشخص کرده ایم کمتر شده باشد آن چند جمله ای به عنوان چند جمله ای مناسب در خروجی نشان داده می شود. در غیر این صورت به مرحله ۱ رفته و سکونتگاه های جدید را بررسی میکنیم.

۴)موازی سازی تابع هزینه.

برنامه به صورتی نوشته شده است که با استفاده از تمام هسته های پردازنده بتوان با سرعت بیشتر به جواب نهایی رسید. برای مثال در حلقه های تکرار با این تکنیک میتوان زمان صرف شده را کاهش داد.

پس از طی مراحل بالا جواب هایی با دقت بیش از 10^{-4} به دست خواهد آمد که بنا به مسئله و تابع به دست آمده،میتوان دقت های بالاتری نیز به دست آورد.

نتایج عددی

در این بخش به بررسی ورودی ها و تحلیل نتایج با استفاده از الگوریتم فاخته ی اصلاح شده می پردازیم.

مثال ۱:

مثال زیر با جواب واقعی خطی یکی از مثال های فردهلم نوع اول است که به حل آن پرداخته ایم.

رابطه (۲۰)

$$\frac{(1+x^2)^{3/2}-x^3}{3}=\int_0^1 (x^2+t^2)^{\frac{1}{2}} y(t)\,dt$$

جدول ۱:جدول ورودی مثال های ۱

پارامترهای الگوریتم بهینه سازی فاخته	
مینیمم تعداد تخم های	۲
ماکزیمم تعداد تخم های	۴
حد بالای بازه ی جستجو	۱۰
حد پایین بازه ی جستجو	-۱۰
تعداد تکرار	۱۰۰
تعداد کلاسترها	۱
تعداد متغییرها	۱
بیشترین تعداد فاخته ها	۱۵
شعاع تخمگذاری	۵
ضریب مهاجرت	۲
تعداد نقاط گسسته سازی برای محاسبه تابع هزینه	۱۰
پارامترهای معادله ی انتگرال	

مجلـه‌ی علمی پژوهش در علوم رایانه، شماره ۱۷، بهار ۱۳۹۹، ص ۷۶- ۶۰

ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir

$f(x)$	$-(\frac{(1+x^2)^{3/2}-x^3}{3})$
$k(x.t)$	$(x^2+t^2)^{\frac{1}{2}}$
ابتدای بازه ی انتگرال گیری	۰
انتهای بازه ی انتگرال گیری	۱

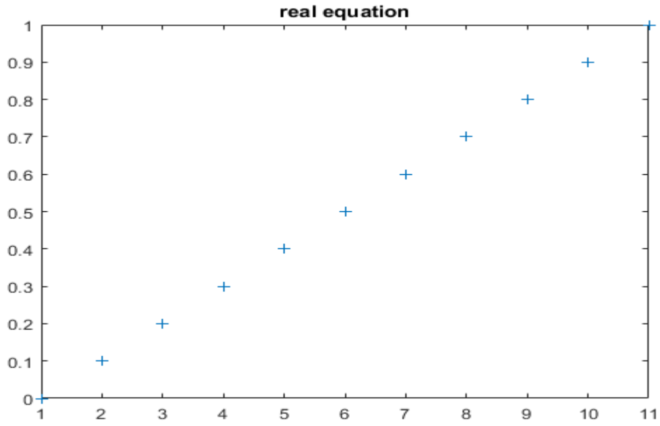
جدول ۲:جدول نتایج مثال ۱

نتایج الگوریتم بهینه سازی فاخته	
زمان اجرا	
زمان اجرای سریال	11دقیقه
زمان اجرای موازی	9دقیقه
هزینه ی فاخته نهایی	$3/6022\times10^{-5}$
چند جمله ای تقریبی بهترین فاخته	$1^{\times}x$
مقایسه تابع واقعی جواب با چند جمله ای حاصل از الگوریتم فاخته	
بیشترین اختلاف جواب واقعی با جواب تقریبی الگوریتم فاخته	3×10^{-4}
کمترین اختلاف جواب واقعی با جواب تقریبی الگوریتم فاخته	5×10^{-6}

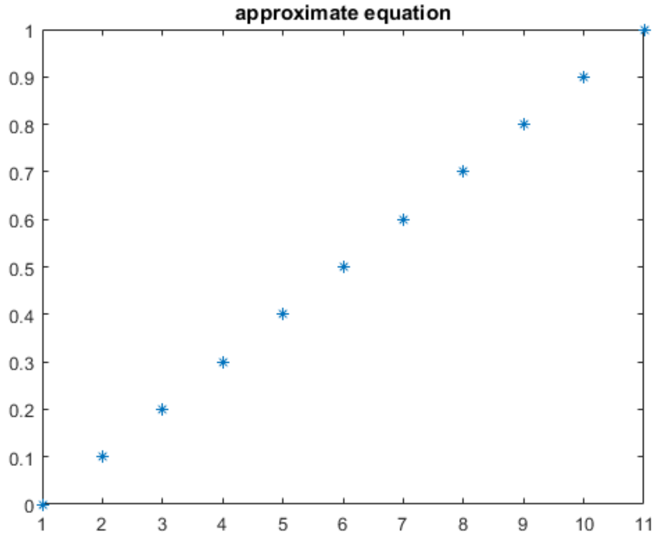
جدول شماره ۳: بررسی جواب در ۱۰ نقطه

گسسته سازی در ۱۰ نقطه			
Xi	جواب واقعی	$ax+b$	ax
۰,۱	۰,۱	۰,۱۰۰۰	۰,۱
۰,۲	۰,۲	۰,۲۰۰۰	۰,۲
۰,۳	۰,۳	۰,۳۰۰۰	۰,۳
۰,۴	۰,۴	۰,۴۰۰۰	۰,۴
۰,۵	۰,۵	۰,۵۰۰۰	۰,۵
۰,۶	۰,۶	۰,۵۹۹۹	۰,۶
۰,۷	۰,۷	۰,۶۹۹۹	۰,۷
۰,۸	۰,۸	۰,۷۹۹۹	۰,۸
۰,۹	۰,۹	۰,۸۹۹۹	۰,۹
۱	۱	۰,۹۹۹۹	۱

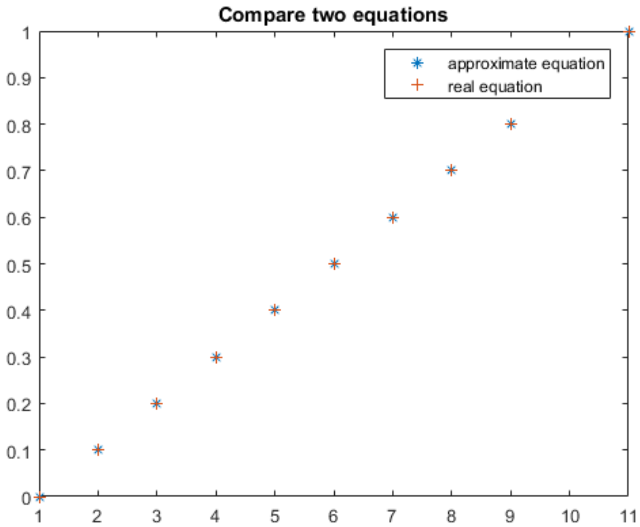
ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir



شکل ۱:نمودار جواب با تابع حقیقی



شکل ۲:نمودار جواب با تابع تقریب زده شده



شکل ۳: مقایسه تابع حقیقی و تابع تقریب

مجله‌ی علمی پژوهش در علوم رایانه، شماره ۱۷، بهار ۱۳۹۹، ص ۷۶– ۶۰
ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir

مثال ۲:

مثال زیر تابعی نمایی را برای جواب واقعی دارد که در حالت عادی حل آن زمانی زیادی طلب می کند و جواب حاصله جوابی دقیق نخواهد شد.در اینجا با کمک از چند جمله ای هرمیت به حل آن پرداختیم.

رابطه(۲۱)

$$\int_0^1 e^{xt} y(t)\,dt = \frac{e^{x+1}-1}{x+1}$$

جدول ۴:جدول ورودی مثال های ۲

پارامترهای الگوریتم بهینه سازی فاخته	
مینیمم تعداد تخم های	۲
ماکزیمم تعداد تخم های	۴
حد بالای بازه ی جستجو	۱۰
حد پایین بازه ی جستجو	۰
تعداد تکرار	۱۰۰
تعداد کلاسترها	۶
تعداد متغییرها	۲
بیشترین تعداد فاخته ها	۲۵
شعاع تخمگذاری	۵
ضریب مهاجرت	۲
تعداد نقاط گسسته سازی برای محاسبه تابع هزینه	۱۰
پارامترهای معادله ی انتگرال	
$f(x)$	$\frac{e^{x+1}-1}{x+1}$
$k(x.t)$	e^{xt}
ابتدای بازه ی انتگرال گیری	۰
انتهای بازه ی انتگرال گیری	۱

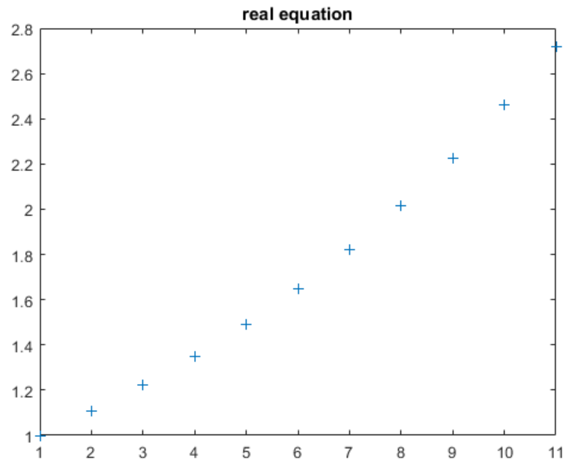
جدول ۵:جدول نتایج مثال ۲

نتایج الگوریتم بهینه سازی فاخته	
زمان اجرا	
زمان اجرای سریال	50 min
زمان اجرای موازی	37 min
هزینه ی فاخته نهایی	1×10^{-4}
چند جمله ای تقریبی بهترین فاخته	$e^{0.9952t+0.0028}$
مقایسه تابع واقعی جواب با چند جمله ای حاصل از الگوریتم فاخته	
بیشترین اختلاف جواب واقعی با جواب تقریبی الگوریتم فاخته	-54×10^{-4}
کمترین اختلاف جواب واقعی با جواب تقریبی الگوریتم فاخته	1×10^{-4}

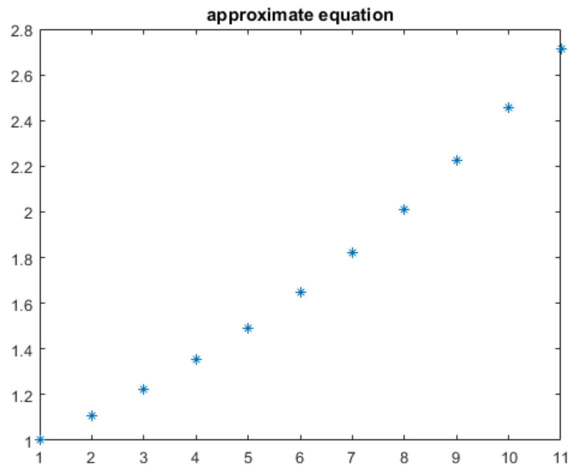
مجلـه‌ی علمی پژوهش در علوم رایانه، شماره ۱۷، بهار ۱۳۹۹، ص ۷۶– ۶۰
ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir

جدول شماره ۶: بررسی جواب در ۱۰ نقطه

گسسته سازی در ۱۰ نقطه			
Xi	جواب واقعی	جواب تقریب زده شده با هریمت مرتبه ۲	جواب تقریب زده شده با e^{ax+b}
۰,۱	۱,۱۰۵۲	۱,۰۷۱۴	۱,۱۰۷۷
۰,۲	۱,۲۲۱۴	۱,۲۴۷۴	۱,۲۲۳۷
۰,۳	۱,۳۴۹۹	۱,۴۲۳۵	۱,۳۵۱۷
۰,۴	۱,۴۹۱۸	۱,۵۹۹۵	۱,۴۹۳۱
۰,۵	۱,۶۴۸۷۸	۱,۷۷۵۶	۱,۶۴۹۴
۰,۶	۱,۸۲۲۱	۱,۹۵۱۷	۱,۸۲۲۰
۰,۷	۲,۰۱۳۸	۲,۱۲۷۷	۲,۰۱۲۶
۰,۸	۲,۲۲۵۵	۲,۳۰۳۸	۲,۲۲۳۲
۰,۹	۲,۴۵۹۶	۲,۴۷۹۸	۲,۴۵۵۹
۱	۲,۷۱۸۳	۲,۶۵۵۹	۲,۷۱۲۹

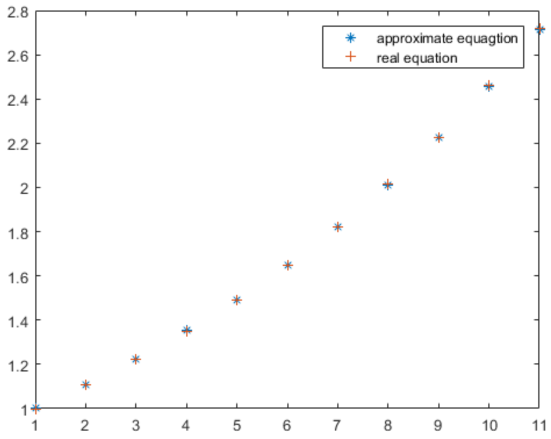


شکل ۴: نمودار جواب واقعی برای مثال



شکل ۵: نمودار بهترین جواب تقریب زده شده

مجلـه‌ی علمی پژوهش در علوم رایانه، شماره ۱۷، بهار ۱۳۹۹، ص ۷۶- ۶۰
ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir



شکل ۶: نمودار مقایسه جواب واقعی و جواب تقریب زده شده

مثال ۳:

و در آخر مثالی که برای حل در نظر گرفته شده مثالی با تابع سینوسی ولی جواب واقعی خطی می باشد،با توجه به حجم محاسباتی زیاد الگوریتم فاخته جواب بسیار دقیقی را در کمترین زمان به دست می آورد.

رابطه(۲۲)

$$\int_0^1 sin(xt)\, y(t)\, dt = \frac{sin(x) - xcos(x)}{x^2}$$

جدول ۷:جدول ورودی مثال ۳

پارامترهای الگوریتم بهینه سازی فاخته	
مینیمم تعداد تخم های	۲
ماکزیمم تعداد تخم های	۴
حد بالای بازه ی جستجو	۱۰
حد پایین بازه ی جستجو	-۱۰
تعداد تکرار	۵۰
تعداد کلاسترها	۶
تعداد متغییرها	۲
بیشترین تعداد فاخته ها	۵
شعاع تخمگذاری	۵
ضریب مهاجرت	۲
تعداد نقاط گسسته سازی برای محاسبه تابع هزینه	۱۰
پارامترهای معادله ی انتگرال	
$f(x)$	$-(\frac{\sin(x) - xcos(x)}{x^2})$
$k(x.t)$	$(\sin(xt)\, y(t)\, dt)$
ابتدای بازه ی انتگرال گیری	۰
انتهای بازه ی انتگرال گیری	۱

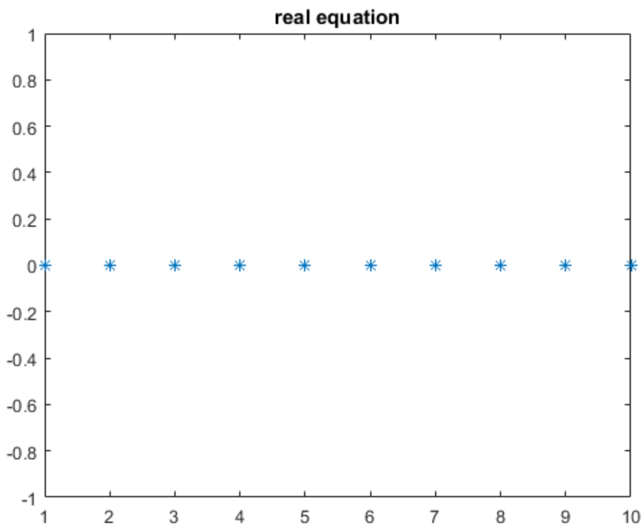
مجلـه‌ی علمی پژوهش در علوم رایانه، شماره ۱۷، بهار ۱۳۹۹، ص ۷۶- ۶۰
ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir

جدول ۸:جدول نتایج مثال ۳

نتایج الگوریتم بهینه سازی فاخته	
زمان اجرا	
زمان اجرای سریال	15 min
زمان اجرای موازی	12 min
هزینه ی فاخته نهایی	$\mathbf{1 \times 10^{-9}}$
چند جمله ای تقریبی بهترین فاخته	$\mathbf{0.98}x$
بیشترین اختلاف جواب واقعی با جواب تقریبی الگوریتم فاخته	$\mathbf{3 \times 10^{-5}}$
کمترین اختلاف جواب واقعی با جواب تقریبی الگوریتم فاخته	$\mathbf{3 \times 10^{-7}}$

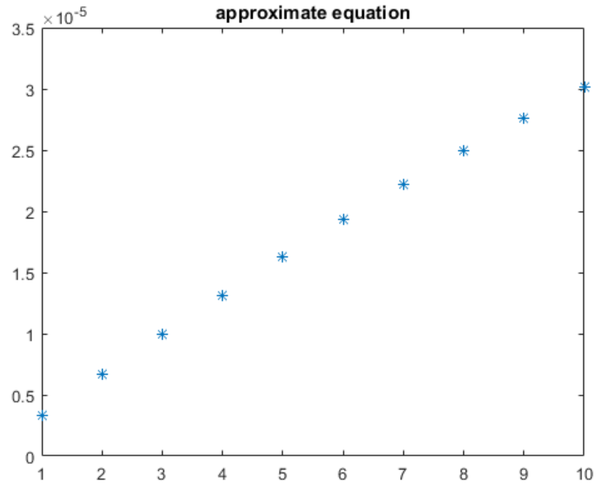
جدول شماره ۹: بررسی جواب در ۱۰ نقطه

گسسته سازی در ۱۰ نقطه			
Xi	جواب واقعی	$ax + b$	ax
۰,۱	۰,۱	۰,۱	۰,۰۹۸۰
۰,۲	۰,۲	۰,۲	۰,۱۹۶۰
۰,۳	۰,۳	۰,۳	۰,۲۹۴۰
۰,۴	۰,۴	۰,۴	۰,۳۹۲۰
۰,۵	۰,۵	۰,۵	۰,۴۹۰۰
۰,۶	۰,۶	۰,۶	۰,۵۸۸۰
۰,۷	۰,۷	۰,۷	۰,۶۸۶۰
۰,۸	۰,۸	۰,۸	۰,۷۸۴۰
۰,۹	۰,۹	۰,۹	۰,۸۸۲۰
۱	۱	۱	۰,۹۸۰۰

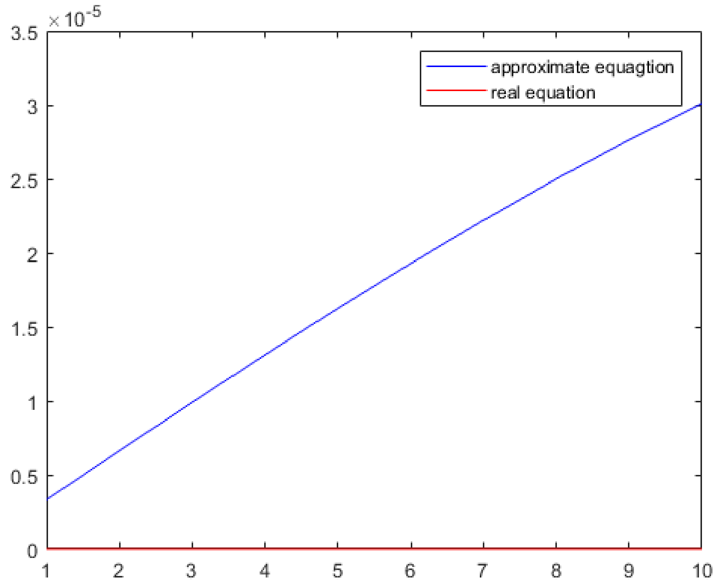


شکل ۷:نمودار جواب واقعی

ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir



شکل ۸:نمودار جواب تقریب زده شده



شکل ۹:نمودار مقایسه جواب واقعی و تقریبی

نتیجه گیری

هدف اصلی نشان دادن توانایی الگوریتم جستجوی فاخته اصلاح شده برای حل مسائل انتگرال فردهلم نوع اول است و با حل مثال های بالا به این نتیجه می‌رسیم که این الگوریتم برای حل این گونه مسائل مناسب می باشد و می توان یک جواب بهینه برای انتگرال های فردهلم نوع اول با استفاده از الگوریتم فاخته اصلاح شده بدست آورد. با بررسی نتایج الگوریتم می توان گفت در اکثر مسائل با در نظر گرفتن شعاع های بزرگ و به مرور کم کردن آن جواب های سریع تری خواهیم داشت همچنین بهتر است در حل مسائل با بازه اعداد زیاد تعداد کلاستر ها را بین ۵ تا ۱۰ در نظر بگیریم.

یافتن جواب معادلات انتگرال به صورت دقیق با استفاده از روش های تکراری گاه زمان بر و مشکل است،در این مقاله به کمک الگوریتم فاخته اصلاح شده برای جواب چند معادله انتگرالی مختلف توانستیم یک چندجمله ای با دقت بالا تقریب بزنیم. برتری این روش نسبت به سایر روش های حل معادلات انتگرالی همچون آدومیان و روش حل سری، در زمان اجرا و شکل جواب موردنظر می باشد، روش های قدیمی همچون آدومیان به علت داشتن یک سری با تعداد زیادی جمله نیازمند صرف زمان زیادی برای محاسبات بودند، که برای چندجمله ای هایی از درجه ی بالاتر، این محاسبات گاه پیچیده و دارای زمان اجرای

ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir

بسیار طولانی می شود. همچنین امکان موازی سازی برای این روش ها وجود ندارد چون تمام محاسبات به هم وابسته بوده و قابلیت اجرای همزمان را دارا نیستند، پس حتی با استفاده از کامپیوترهایی با تعداد هسته ی بالا ، در سرعت اجرا این روش ها تاثیر محسوسی احساس نمی شود. اما حل معادلات انتگرالی با استفاده از الگوریتم بهینه سازی فاخته برای چندجمله ای هایی از درجه ی بالاتر در زمان بسیار کمتری انجام خواهد شد .همچنین در روشهایی مانند آدومیان، با یک سری با بی نهایت جمله رو به رو هستیم برای به دست آوردن مقدار این سری مجبوریم تعداد متناهی از جملات آنرا در نظر بگیریم و این باعث می شود تعدادی جمله ی اضافی که ممکن است در تکرار بعدی حذف شود وجود داشته باشند و به این ترتیب شکل جواب بسیار پیچیده و طولانی شود. در حالی که در الگوریتم فاخته برای هر تکرار تعداد جملات چند جمله ای در کنترل ما خواهد بود (با تعیین تعداد فاخته های زنده در هر تکرار مسئله) با این کار مانع از اتلاف وقت و چک کردن تعداد بسیار زیادی چند جمله ای می شویم .از دیگر نقاط قوت این روش می توان به حق انتخاب چهار چوب چند جمله ای اشاره کرد.به این صورت که با کمک چند آزمون و خطا می توان پایگاه داده بسیار قوی از چند جمله ای های معروف مانند لاگرانژ ،هریمت،چبیشف و... به وجود آورد که به فراخور هر مسئله از نوع خاصی از چند جمله ای ها استفاده کرد.البته نیاز به توضیح نیست که هیچ روش دقیقی برای حدس زدن نوع چند جمله ای نیست و تنها راه نزدیک شدن به چند جمله ای بهتر فقط تست کردن روش های موجود در پایگاه داده خود است.بر حسب تجربه میتوان ادعا کرد که نتایج اولیه در ۲۰تکرار اول خود را نشان می دهند و کافی است در همین ۲۰ تکرار خوب یا بد بودن نوع چند جلمه ای را مشخص کرد.برای استفاده هرچه بهتر از الگوریتم فاخته اصلاح شده ، دانستن روش ها و قالب های چند جمله ای کاملا الزامی است .البته مانند سایر روش ها، در این روش نیز با مشکلاتی روبه رو بوده ایم، به عنوان مثال هر چه درجه ی چندجمله ای افزایش پیدا کند یافتن جواب معادله ی انتگرالی سخت تر خواهد شد ولی در صورت همگرا شدن به جواب دقت خوبی در تقریب خواهیم داشت.

ISSN: 2745-3673
http://www. Rcsj. ir

منابع و مراجع

[1] J. Han, J. Pei, and M. Kamber, Data mining: concepts and techniques. Elsevier, 2011.

[2] H. Liu and H. Motoda, Feature selection for knowledge discovery and data mining, vol. 454. Springer Science & Business.

[3] Al-Tashi, Q., Abdulkadir, S. J., Rais, H. M., Mirjalili, S., & Alhussian, H. (2019). Binary Optimization Using Hybrid Grey Wolf Optimization for Feature Selection. IEEE Access, 1–1.doi:10.1109/access.2019.2906757.

[4] Li, Y, Li, T. & Liu, H. (2017). Recent advances in feature selection and its applica- tions. Knowledge and Information Systems, 53 (3), 551–577.

[5] Z. Avazzadeh, and M.Heydari, Chebyshev polynomials for solving two dimensional linear and nonlinear integral equations of the second kind, Comput. and Appl. Math., 31(1) (2012) 127-142.

[6] M. Rahimi, Y.Shahmorad, , S.Talati, And F.Tari, An Operational Method for The Numerical Solution of Two Dimensional Linear Fredholm Integral Equations with an Error Estimation, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 36(2) (2010) 119-132..

[7] E.Tohidi, , Taylor matrix method for solving linear two-dimensional Fredholm integral equations with Piecewise Intervals, Computational and Applied Mathematics, 34(3) (2015) 1117-1130

[8] Wazwaz, A. M. (2011). ”Linear and nonlinear integral equations: methods and applications”. Springer Science & Business Media.

[9] Mirzaee, F. and Hadadiyan, E., Numerical solution of linear Fredholm integral equations via two-dimensional modification of hat functions, Appl. Math. Comput., 250 (2015) 805-816.

[10] Guoqiang, H. and Wang, R., Richardson extrapolation of iterated discrete Galerkin solution for twodimensional Fredholm integral equations, J. Comput. and Appl. Math.,139 (2002) 4963.

[11] Guoqiang, H. and Jiong, W., Extrapolation of Nystrom solution for two-dimensional nonlinear Fredholm integral equations, J. Comput. and Appl. Math., 134 (2001) 259-268.

[12] Lin, Q., Sloan, I. H. and Xie R., Extrapolation of the iteration collocation method for integral equations of the second kind, SIAM J. Numer. Anal., 27 (1990) 1535-1541.

[13] McLean, W., Asymptotic error expansions for numerical solutions of integral equations, IMA J. Numer. Anal.,9(1989) 373-384.

[14] Rajabioun, R. (2011). Cuckoo optimization algorithm. Applied soft computing, 11(8), 5508-5518