

بررسی خواص همگرایی در فضاهاى LP

محمد مهدی حیدری

کارشناسی ارشد ریاضی محض، آنالیز دانشگاه ایلام، ایلام، ایران.

نام نویسنده مسئول:

محمد مهدی حیدری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۱/۱۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۳/۰۹

چکیده

در این مقاله به بررسی خواص همگرایی در فضاهاى (L^p) می‌پردازیم؛ فضاهایی که نقش بنیادینی در آنالیز تابعی، نظریه اندازه و کاربردهای متنوع در معادلات دیفرانسیل، احتمال و پردازش سیگنال دارند. تمرکز اصلی پژوهش بر مقایسه و تحلیل انواع مختلف همگرایی از جمله همگرایی نقطه‌ای، همگرایی تقریباً یکنواخت، همگرایی در نرم و همگرایی در اندازه در فضاهاى (L^p) است. ابتدا ساختار کلی فضاهاى (L^p) و ویژگی‌های اساسی آن‌ها همچون تمامیت، بازتابی بودن و دوگانگی مورد مرور قرار می‌گیرد. سپس با تبیین ارتباط میان انواع مختلف همگرایی، شرایطی که تحت آن‌ها همگرایی در یک معنا به همگرایی در معنای دیگر منجر می‌شود، بررسی می‌گردد. روش‌شناسی مقاله مبتنی بر مطالعه تحلیلی - نظری، استفاده از گزاره‌ها و قضایای کلاسیک مانند قضیه فاطو، قضیه لبدگ برای همگرایی تحت علامت انتگرال و قضیه حدی مسلط است. یافته‌ها نشان می‌دهد که برای دنباله‌های توابع در (L^p) ، وجود کران‌های مناسب و شرایط یکنواختی می‌تواند تضمین‌کننده گذار میان انواع همگرایی‌ها باشد. در پایان، ضمن تأکید بر اهمیت این نتایج در تحلیل مسائل کاربردی، به برخی مسیرهای پژوهشی باز در زمینه همگرایی در فضاهاى (L^p) اشاره می‌شود.

واژگان کلیدی: فضاهاى (L^p) ، همگرایی در نرم، همگرایی نقطه‌ای، همگرایی در اندازه، آنالیز تابعی، نظریه اندازه.

مقدمه

در قلب آنالیز ریاضی مدرن، فضاهای L^p به عنوان ابزاری بی‌بدیل برای بررسی توابع قابل اندازه‌گیری جایگاهی استراتژیک دارند. این فضاها که به طور گسترده‌ای به عنوان تعمیم طبیعی فضاهای اقلیدسی n -بعدی برای فضاهای تابع به شمار می‌آیند، نه تنها در ریاضیات محض، بلکه به عنوان زبان مشترک در حوزه‌های متنوعی همچون نظریه احتمال، مکانیک کوانتوم، پردازش سیگنال، و حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی شناخته می‌شوند. همان‌طور که رودین (۱۹۸۷) بیان می‌کند، قدرت این فضاها در این است که ساختار جبری یک فضای برداری را با ساختار توپولوژیک یک فضای باناخ (و در مورد $p=2$ یک فضای هیلبرت) به بهترین نحو ترکیب کرده‌اند.

یکی از چالش‌برانگیزترین و در عین حال جذاب‌ترین مباحث در نظریه فضاهای L_p ، تحلیل رفتار حدی دنباله‌های تابعی است. در فضاهای متناهی‌بعدی، مفهوم همگرایی اغلب یکپارچه و ساده است، اما در فضاهای بی‌نهایت‌بعدی L_p ، نوع "نحوه" همگرایی می‌تواند نتایج بسیار متفاوتی را در بر داشته باشد. به عنوان مثال، همگرایی در نرم لزوماً تضمین‌کننده همگرایی نقطه‌ای در همه جا نیست، و بالعکس، همگرایی نقطه‌ای بدون شرایط اضافی (مانند کرانداری مسلط) نمی‌تواند همگرایی در نرم را تضمین کند. این تفکیک میان انواع همگرایی (نرم، نقطه‌ای، در اندازه، و ضعیف) مستلزم دقت نظری بسیار بالایی است.

اهمیت این موضوع زمانی دوچندان می‌شود که با مسائلی نظیر فشردگی و بازتابی بودن فضاها روبرو هستیم. در کاربردهای عملی، زمانی که با دنباله‌ای از توابع تقریبی سر و کار داریم، اغلب پرسش اصلی این است که آیا حد این دنباله در همان فضای L_p قرار دارد و آیا می‌توان عملگرهای انتگرالی را با حد جابجا کرد یا خیر. پاسخ به این سوالات مستلزم شناخت عمیق از قضایای کلاسیک مانند قضیه همگرایی مسلط لبگ، قضیه همگرایی یکنواخت و قضایای همگرایی ویتالی است. در متون فارسی، اگرچه منابع معتبری همچون لطفی (۱۳۹۸) و موسوی (۱۴۰۰) به جنبه‌های تئوریک این مباحث پرداخته‌اند، اما نیاز به یک بازخوانی منسجم که پیوند میان "تئوری اندازه" و "خواص توپولوژیک همگرایی" را برقرار کند، همچنان احساس می‌شود.

علاوه بر جنبه‌های نظری، در دهه‌های اخیر، مطالعه رفتار دنباله‌ها در فضاهای L^p با ظهور نظریه موجک‌ها و تحلیل هارمونیک اهمیت کاربردی بیشتری یافته است. بسیاری از مسائل در بازسازی تصاویر و فشرده‌سازی داده‌ها مستقیماً با همگرایی توابع در نرم L^2 یا L^p گره خورده‌اند. این مقاله تلاش می‌کند تا با رویکردی ساختاریافته، ضمن مرور تعاریف پایه، به تحلیل شرایطی بپردازد که در آن، گذار از یک نوع همگرایی به نوع دیگر ممکن می‌شود. با بررسی ابزارهای تحلیلی و ارائه مثال‌های نقض کلاسیک (مانند دنباله توابع "چادر" یا توابع "سوزنی")، سعی بر آن است که تصویری روشن از محدودیت‌ها و توانمندی‌های همگرایی در فضاهای L^p ارائه گردد.

مبانی نظری

تعریف فضاهای L^p

فرض کنید (X, M, μ) یک فضای اندازه باشد. برای $1 \leq p < \infty$ ، فضای $L^p(X, \mu)$ شامل تمام توابع اندازه‌پذیر $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ است که انتگرال زیر برای آن‌ها متناهی باشد:

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty$$

این فضاها تحت نرم $\|\cdot\|_p$ یک فضای برداری نرم‌دار تشکیل می‌دهند. قضیه «ریس-فیشر» تضمین می‌کند که این فضاها تحت این نرم، کامل هستند؛ یعنی هر دنباله کوشی در L^p به تابعی در همان فضا همگرا می‌شود (Folland, ۲۰۱۳).

نابرابری‌های پایه

برای بررسی همگرایی در این فضاها، دو نابرابری بنیادین نقش کلیدی دارند:

۱. نابرابری هولدر: اگر $1/p + 1/q = 1$ باشد، آنگاه برای توابع $f \in L^p, g \in L^q$ داریم:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

این نابرابری ابزار اصلی برای بررسی همگرایی ضرب توابع است (Royden & Fitzpatrick, ۲۰۱۰).

۲. نابرابری مینکوسکی: این نابرابری که به نوعی نابرابری مثلثی برای نرم L^p است، بیان می‌دارد:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

۱- انواع همگرایی در L^p

در فضای L^p ، ما با چهار نوع همگرایی اصلی روبرو هستیم که ارتباط میان آن‌ها زیربنای تحلیل‌های بعدی است (Brezis, ۲۰۱۱):

• همگرایی در نرم: دنباله $\{f_n\}$ در L^p به f همگراست اگر $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ وقتی $n \rightarrow \infty$

• همگرایی نقطه‌ای: $f_n \rightarrow f$ نقطه‌ای اگر برای تقریباً تمام $x \in X$ ، $f_n(x) \rightarrow f(x)$

• همگرایی در اندازه: برای هر $\epsilon > 0$ ، $\mu(\{x | f_n(x) - f(x) > \epsilon\}) \rightarrow 0$

• همگرایی تقریباً یکنواخت: دنباله f_n به f تقریباً یکنواخت همگراست اگر برای هر $\delta > 0$ ، مجموعه‌ای مانند E با $\mu(E) < \delta$ وجود داشته باشد که f_n روی $X \setminus E$ به‌طور یکنواخت به f همگرا شود (Egorov's Theorem).

۲- ارتباط میان همگرایی‌ها

یکی از قضایای مهم در اینجا، ارتباط بین همگرایی در نرم و همگرایی در اندازه است: اگر $f_n \rightarrow f$ در L^p باشد، آنگاه

$\{f_n\}$ دارای زیردنباله‌ای است که در اندازه (و تقریباً همه جا) به f همگراست. همچنین، قضیه همگرایی مسلط لیگ (LDCT) بیان می‌کند که اگر $f_n \rightarrow f$ نقطه‌ای باشد و دنباله توسط یک تابع انتگرال‌پذیر $g \in L^p$ کنترل شود ($|f_n| \leq g$ ، آنگاه

$f_n \rightarrow f$ در نرم L^p (Rudin, 1987).

۳. روش‌شناسی

روش‌شناسی این پژوهش بر پایه آنالیز تحلیلی - تئوریک استوار است. با توجه به ماهیت ریاضی موضوع، هدف ما اثبات نتایج تجربی نیست، بلکه بررسی دقیق شرایط گذار میان انواع همگرایی در ساختارهای توپولوژیک فضاهای L^p است. مراحل اصلی این روش‌شناسی به شرح زیر است:

رویکرد استنتاجی و تحلیلی

در این تحقیق، از استدلال‌های قیاسی مبتنی بر اصول نظریه اندازه و انتگرال لیگ استفاده شده است. ابتدا با اتکا به تعریف نرم L^p ، پایداری دنباله‌های توابع در فضای باناخ بررسی می‌شود. متدولوژی اصلی در این بخش، تجزیه و تحلیل "ساختار فضای اندازه‌پذیر" است؛ به‌طوری که رفتار دنباله‌ها در فضاهای با اندازه متناهی ($\mu(X) < \infty$) با فضاهای با اندازه نامتناهی مقایسه می‌گردد (Brezis, ۲۰۱۱).

تحلیل گزاره‌های کلاسیک

روش کار شامل به‌کارگیری گزاره‌های زیر به‌عنوان ابزارهای اثبات است:

استفاده از لم فاطو: برای تعیین کران پایین حد انتگرال دنباله‌های توابع نامنفی.

به‌کارگیری قضیه همگرایی مسلط لیگ (LDCT): جهت شناسایی شرایطی که تحت آن همگرایی نقطه‌ای به همگرایی در

نرم تبدیل می‌شود.

بهره‌گیری از قضیه ایگوروف: برای ایجاد پل ارتباطی میان همگرایی تقریباً همه جا و همگرایی تقریباً یکنواخت (Folland, ۲۰۱۳).

مدل‌سازی مثال‌های نقض

برای تعیین محدودیت‌های همگرایی، از "روش مثال‌های نقض" استفاده شده است. از آنجا که در فضاهای بی‌نهایت‌بعدی، همگرایی نقطه‌ای لزوماً همگرایی در نرم را نتیجه نمی‌دهد، با طراحی دنباله‌های خاص (مانند $f_n(x) = n^{\frac{1}{p}}X(0, \frac{1}{n})$)، مرزهای نظری قضایا مشخص شده است. این روش به ما اجازه می‌دهد تا "شرط لازم و کافی" برای همگرایی‌ها را به صورت دقیق تعریف کنیم (Rudin, ۱۹۸۷).

دسته‌بندی و مقایسه

در نهایت، با استفاده از یک ماتریس تطبیقی، روابط میان انواع همگرایی در حالت‌های $p = \infty, 1 \leq p < \infty$ بررسی شده است. این دسته‌بندی شامل شرایط «کران‌داری در نرم»، «یکنواختی انتگرال‌پذیری» و «پایداری اندازه» است که چارچوب اصلی بحث در بخش یافته‌ها را تشکیل می‌دهد.

یافته‌ها

در این بخش، بر اساس مبانی نظری و روش‌شناسی مطرح‌شده، به بررسی سیستماتیک روابط میان انواع همگرایی در فضاهای (L^p) و شرایط لازم و کافی برای گذار از یک نوع همگرایی به نوع دیگر می‌پردازیم.

از همگرایی در نرم به همگرایی در اندازه و نقطه‌ای

یکی از نتایج پایه‌ای در فضاهای (L^p) ، این است که:

اگر $f \in L^p(X, \mu), \{f_n\} \subset L^p(X, \mu)$ چنان باشد که

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

آنگاه $(f_n \rightarrow f)$ در اندازه، و در نتیجه، دنباله‌ای فرعی از $\{f_n\}$ به (f) تقریباً همه‌جا (a.e.) همگرا خواهد شد. این نتیجه، محصول ترکیب نابرابری‌های مارکوف/چیشف با تعریف همگرایی در اندازه است. به طور مشخص، برای هر $(\epsilon > 0)$ داریم:

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_X |f_n - f|^p d\mu = \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\epsilon^p} \rightarrow 0$$

که نشان می‌دهد همگرایی در نرم، همگرایی در اندازه را به دنبال دارد (Rudin, 2013؛ Folland, ۱۹۸۷). این نتیجه نشان می‌دهد که همگرایی در نرم یک مفهوم «قوی‌تر» نسبت به همگرایی در اندازه است، اما تضمین‌کننده همگرایی نقطه‌ای روی کل فضا نیست؛ تنها وجود زیردنباله‌ای را تضمین می‌کند که به صورت a.e. همگراست. این تمایز در مسائل کاربردی - مثلاً در تقریب عددی - بسیار مهم است، چون در آنجا غالباً همگرایی «کل دنباله» مورد نظر است نه صرفاً زیردنباله‌ها.

از همگرایی نقطه‌ای به همگرایی در نرم: نقش قضیه همگرایی مسلط لبگ

همگرایی نقطه‌ای به تنهایی در (L^p) بسیار ضعیف است. قضیه همگرایی مسلط لبگ را مشخص می‌کند که تحت آن می‌توان از همگرایی نقطه‌ای یا همگرایی تقریباً همه‌جا، به همگرایی در نرم گذر کرد: قضیه (همگرایی مسلط لبگ):

اگر $\{f_n\} \subset L^p(X, \mu)$ و (f) تابعی قابل اندازه‌گیری باشد به طوری که:

$$(1. f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ تقریباً همه‌جا؛})$$

۲. تابعی $g \in L^p(X, \mu)$ وجود داشته باشد که $|f_n(x)| \leq g(x)$ برای تقریباً همه (x) ، آنگاه $f \in L^p(X, \mu)$ و $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$

این نتیجه در بسیاری از منابع کلاسیک از جمله (Royden & Fitzpatrick, 2010; Brezis, ۲۰۱۱) به‌عنوان یکی از ستون‌های اصلی نظریه انتگرال لبگ در فضاهای (L^p) معرفی می‌شود. شرط وجود تابع مسلط (g) در اینجا حیاتی است. بدون این شرط، ممکن است دنباله‌ای از توابع که نقطه‌ای همگراست، در نرم به حد خود نزدیک نشود. مثال کلاسیک:

$$f_n(x) = n^{1/p} \chi_{(0,1/n)}(x), \quad x \in (0,1), \quad 1 \leq p < \infty$$

برای هر $(x > 0)$ ، نهایتاً $(f_n(x) = 0)$ و لذا $(f_n(x) \rightarrow 0)$ نقطه‌ای، اما:

$$\|f_n\|_p^p = \int_0^1 |f_n(x)|^p dx = \int_0^{1/n} n dx = 1$$

بنابراین $\|f_n - 0\|_p = 1$ برای همه (n) ، و همگرایی در نرم رخ نمی‌دهد (Rudin, ۱۹۸۷). این مثال به‌روشنی نشان می‌دهد که بدون کرانداری مسلط یا شرط یکنواختی انتگرال‌پذیری، از همگرایی نقطه‌ای نمی‌توان همگرایی در نرم نتیجه گرفت.

همگرایی در اندازه، همگرایی تقریباً یکنواخت، و قضیه ایگوروف

قضیه‌ای اساسی که رابطه بین همگرایی در اندازه و همگرایی تقریباً یکنواخت را روشن می‌سازد، قضیه ایگوروف است. در فضاهای با اندازه متناهی، این قضیه بیان می‌کند:

اگر $f_n \rightarrow f$ و $\mu(X) < \infty$ تقریباً همه‌جا، آنگاه برای هر $\delta > 0$ مجموعه‌ای $E \subset X$ با $\mu(E) < \delta$ وجود دارد که روی $X \setminus E$ ، همگرایی $f_n \rightarrow f$ یکنواخت است (Folland, ۲۰۱۳).

در فضاهای با اندازه متناهی، هر جا همگرایی در اندازه داشته باشیم، می‌توان زیردنباله‌ای یافت که تقریباً یکنواخت همگرا شود؛ در عین حال، همگرایی تقریباً یکنواخت، همگرایی در اندازه را به دنبال دارد. لذا در این فضاها، این دو مفهوم از همگرایی ارتباط نزدیکی با یکدیگر دارند.

این قضیه پلی بین مفاهیم «نظریه اندازه» و مفاهیم کلاسیک «همگرایی یکنواخت» در آنالیز حقیقی است. در عمل، این یعنی اگر بتوانیم ثابت کنیم دنباله در اندازه همگرا است و اندازه‌ی فضا متناهی است، می‌توانیم روی بخش بزرگی از فضا، رفتار یکنواخت دنباله را تضمین کنیم؛ چیزی که در تقریب‌های عددی و تحلیل خطا دارای اهمیت عملی است.

نقش فشردگی و بازتابی بودن در همگرایی ضعیف

برای $1 < p < \infty$ ، فضاهای (L^p) بازتابی هستند و این ویژگی به طور مستقیم با وجود همگرایی ضعیف برای دنباله‌های کراندار مرتبط است (Brezis, ۲۰۱۱):

اگر $\{f_n\} \subset L^p(X, \mu)$ و $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ با $1 < p < \infty$ ، آنگاه دنباله‌ای فرعی $\{f_{n_k}\}$ وجود دارد که به تابعی $f \in L^p$ به‌صورت ضعیف همگرا می‌شود:

$$f_{n_k} \rightharpoonup f \text{ در } L^p$$

همگرایی ضعیف به این معناست که برای هر $q \in L^p$ با $1/p + 1/q = 1$,

$$\int_X f_{n_k}(x)g(x) d\mu \rightarrow \int_X f(x)g(x) d\mu$$

این نتیجه نشان می‌دهد که در بازه $1 < p < \infty$ ، هر دنباله کراندار در (L^p) دست‌کم در «معنای ضعیف» دارای زیردنباله همگراست. در کاربردهایی مانند حل معادلات دیفرانسیل با روش‌های گالرکین یا روش‌های تقریب، این مفهوم بسیار مهم است، چون اغلب نخست همگرایی ضعیف ثابت می‌شود، و سپس با استفاده از ابزارهایی مانند قضیه ویتالی یا شرط‌های فشردگی آن را به همگرایی در نرم ارتقا می‌دهند (Brezis, 2011; Stein & Shakarchi, ۲۰۰۵).

جمع‌بندی روابط میان انواع همگرایی در (L^p)

بر اساس نتایج فوق، می‌توان خلاصه زیر را ارائه کرد (برای فضای (X, M, μ) با اندازه متناهی و $1 \leq p < \infty$):

۱. همگرایی در نرم $\Rightarrow$ همگرایی در اندازه

و از آن، وجود زیردنباله‌ای با همگرایی a.e. نتیجه می‌شود.

۲. همگرایی نقطه‌ای + تابع مسلط $\Rightarrow$ همگرایی در نرم

(طبق قضیه همگرایی مسلط لبگ).

۳. همگرایی در اندازه $\Rightarrow$ وجود زیردنباله‌ای با همگرایی تقریباً یکنواخت

(با استفاده از قضیه ایگوروف و محدود بودن اندازه فضا).

۴. دنباله کراندار در (L^p) (برای $1 < p < \infty$) $\Rightarrow$ وجود زیردنباله‌ای با همگرایی ضعیف به دلیل بازتابی بودن فضا.

این یافته‌ها نشان می‌دهد که در فضاهای (L^p) یک «سلسله‌مراتب» میان انواع همگرایی‌ها وجود دارد؛ این سلسله‌مراتب نه تنها از نظر نظری اهمیت دارد، بلکه چارچوبی عملی برای تحلیل روش‌های تقریب، حل عددی معادلات، و ارزیابی پایداری الگوریتم‌ها ارائه می‌دهد. در بسیاری از مسائل، رسیدن به همگرایی در نرم دشوار است و ابتدا همگرایی در اندازه یا ضعیف اثبات می‌شود؛ سپس با افزودن فرض‌هایی درباره کراندار، یکنواختی انتگرال‌پذیری یا فشردگی، این همگرایی‌ها تقویت می‌گردند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، خواص همگرایی در فضاهای (L^p) را به عنوان یکی از ستون‌های اساسی آنالیز مدرن بررسی کردیم. همان‌طور که تحلیل شد، رفتار دنباله‌های توابع در این فضاهای بی‌نهایت‌بعدی بسیار پیچیده‌تر از فضاهای متناهی‌بعدی است و مفاهیم «همگرایی» بسته به ساختار تعریف‌کننده آن، تفاوت‌های ماهوی با یکدیگر دارند.

نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که هیچ‌کدام از انواع همگرایی به تنهایی نمی‌توانند توصیف‌گر کامل رفتار دنباله‌ها باشند. در حالی که همگرایی در نرم، قوی‌ترین نوع همگرایی در (L^p) است و پایداری در نرم تابع را تضمین می‌کند، اما همگرایی نقطه‌ای و همگرایی در اندازه ابزارهای انعطاف‌پذیرتری در برخورد با مسائل نظری نظریه اندازه هستند. ما نشان دادیم که گذار از یک نوع همگرایی به نوع دیگر، نیازمند شرایطی جانبی همچون «کران‌داری مسلط» (در قضیه LDCT) یا «توزیع یکنواخت جرم انتگرال» (در قضایای همگرایی ویتالی) است. همچنین، بازتابی بودن فضاهای (L^p) برای $1 < p < \infty$ ، نقشی کلیدی در وجود همگرایی ضعیف ایفا می‌کند که این موضوع در کاربردهای مدرن، مانند نظریه بهینه‌سازی و حل عددی معادلات با مشتقات جزئی، ابزاری حیاتی است.

به عنوان جمع‌بندی نهایی، درک سلسله‌مراتب میان این همگرایی‌ها نه تنها یک چالش محض ریاضی است، بلکه پیش‌نیاز تحلیل دقیق در بسیاری از حوزه‌های کاربردی است. هر پژوهشگر در مسیر مطالعه سیستم‌های پویا، پردازش سیگنال، یا فیزیک

کوانتوم، همواره با این پرسش مواجه است که حدِ دنباله توابع در کدام معنا به حدِ هدف همگرا می‌شود. این مقاله با تدوین ساختار روابط میان همگرایی‌ها، نقشه راهی برای عبور از محدودیت‌های کلاسیک فراهم آورده است. در پایان، پیشنهاد می‌شود در پژوهش‌های آتی، تمرکز بیشتری بر همگرایی در «فضاهای (L^p) با وزن‌های متغیر» و تحلیل رفتار همگرایی در حضور عملگرهای غیرخطی صورت گیرد؛ حوزه‌ای که امروزه در مدل‌سازی محیط‌های ناهمگن اهمیت فراوانی یافته است.

منابع

- [۱] لطفی، حمید. (۱۳۹۸). اصول آنالیز تابعی: از فضاها تا عملگرها. تهران: انتشارات فاطمی.
- [۲] موسوی، سید محمد (۱۴۰۰). مبانی آنالیز ریاضی. انتشارات دانشگاه تهران.
- [۳] موسوی، سید محمد؛ احمدی، رضا. (۱۴۰۰). مبانی آنالیز ریاضی و نظریه اندازه. چاپ چهارم، انتشارات دانشگاه تهران.
- [۴] نیکوکار، محمود. (۱۳۹۵). آنالیز ریاضی ۲ و کاربرد آن در فضاها و باناخ. انتشارات آزاده، تهران.
- [5] Brezis, H. (2011). Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer Science & Business Media.
- [6] Brezis, H. (2011). Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer.
- [7] Folland, G. B. (2013). Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. Wiley.
- [8] Royden, H. L., & Fitzpatrick, P. M. (2010). Real Analysis (4th ed.).
- [9] Rudin, W. (1987). Real and Complex Analysis (3rd ed.). McGraw-Hill.
- [10] Rudin, W. (1987). Real and Complex Analysis (3rd ed.). McGraw-Hill Education.
- [11] Rudin, W. (1987). Real and Complex Analysis. McGraw-Hill.
- [12] Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2005). Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces. Princeton University Press.
- [13] Stein, E. M., & Shakarchi, R. (2005). Real Analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces. Princeton University Press.